rec

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

SOLUTION DES EXERCICES RELATIFS AU CHAPITRE 1

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Exercise N°1 I) 1) c), 2) b), 3) a), 4) c), 5) b) , 6) b), 7) a)ii. b)iii.

II) 1) Vrai, 2) Vrai, 3) Vrai, 4) Faux 5) Faux .

Exercice N°2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}=0.$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)}=\frac{-1}{2}\ \lim_{x\to-\infty}x^2\sin\left(\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\frac{1}{x}}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}$$ on pose $y=\dfrac{2}{x}$. Si x tend vers $-\infty$

,alors y tend vers 0^-, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\sin\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{y\to0^-}\dfrac{2}{y}\dfrac{\sin y}{y}=(-\infty)(1)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi x-3}{4x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi x}{4x}=\dfrac{\pi}{4}$ d'où

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi x-3}{4x}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{-\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{\frac{-1}{2}}=-2$.

$$\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to2^+}\sqrt{x+2}+\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-2}\right)}{x-2}$$

$=\lim\limits_{x\to2^+}\sqrt{x+2}+\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\sqrt{4}=2$. On a $\cos\pi x\ge-1$, alors $\cos(\pi x)+3+2x\ge2+2x$ et comme

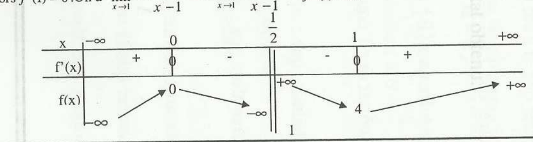
$\lim\limits_{x\to+\infty}2+2x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos(\pi x)+3+2x=+\infty$.

Exercice N°3 1) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)=+\infty$.

La courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation y = 2x +1.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=1$.La courbe (C) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1, alors $f'(1)=0$.On a $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-4}{x-1}=f'(1)=0$.

2)



x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	$-\infty$ ↗		0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

1

3) Si $m\in\left]-\infty,0\right[\Rightarrow2$ solutions ; Si $m=0\Rightarrow$ une seule solution ; Si $m\in\left]0,4\right[\Rightarrow$ pas de solution.
Si $m=4\Rightarrow$ une seule solution, Si $m\in\left]4,+\infty\right[\Rightarrow$ 2 solutions.

Exercice N°4 1) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin^2\pi x}{x-1}$; on pose y = x – 1. Lorsque x tend vers 1, alors y tend vers 0.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin^2\pi x}{x-1}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\sin^2(\pi y+\pi)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\sin^2\pi y}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\sin\pi y}{y}\sin\pi y=\lim\limits_{y\to0}\left(\dfrac{\sin\pi y}{\pi y}\right)\pi\sin\pi y=0$ .Ainsi la fonction

g définie par $\begin{cases}g(x)=\dfrac{\sin^2\pi x}{x-1}\ si\ x\ne1\\ g(1)=0\end{cases}$ est un prolongement par continuité de f en 1

2) $\lim\limits_{x\to0}h(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{2}{\cos x}+\cos x-3\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\cos x-1)(\cos x-2)}{x^2\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\dfrac{2-\cos x}{\cos x}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Donc la fonction φ définie par $\begin{cases}\varphi(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{2}{\cos x}+\cos x-3\right)\ si\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]\setminus\{0\}\\ \varphi(0)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

est le prolongement de f en 0.

3) $\lim\limits_{x\to3}g(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{|x-2|-1}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-2-1}{x-3}=1$ donc la fonction γ définie par :

$\begin{cases}\gamma(x)=\dfrac{|x-2|-1}{x-3}\ si\ x\ne3\\ \gamma(3)=1\end{cases}$ est le prolongement par continuité de f en 3.

Exercice N°5 1) Pour tout $x\in IR$, on a : $-1\le\cos x\le1$ donc $-1+3x\le f(x)\le1+3x$ .Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}1+3x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}-1+3x=+\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty}f=+\infty$.

2) f définie continue et dérivable sur IR . On a $f'(x)=3-\sin x$.
Or $-1\le-\sin x\Rightarrow2\le3-\sin x$ pour tout $x\in IR$. Donc $f'(x)>0$.

f continue strictement croissante sur IR , donc $f(IR)=\left]\lim\limits_{-\infty}f(x),\lim\limits_{+\infty}f(x)\right[=IR$.

Comme $0\in IR$ et d après théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique $\alpha\in IR$ tel que $f(\alpha)=0$ .Or $f\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)=\dfrac{-\pi}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0$ donc $\alpha\in\left]\dfrac{-\pi}{6},0\right[$.

Exercice N°6 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+2}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+2}+x\right)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

2

2) Pour tout $x\in \left]-\infty,1\right[$, on a $-1\le \cos\pi x\le 1 \Rightarrow x-1\le x+\cos\pi x\le x+1$.or Pour tout $x\in \left]-\infty,1\right[$ $x-1<0$

$\Rightarrow \dfrac{x+1}{x-1}\le \dfrac{(x+\cos\pi x)}{x-1}\le \dfrac{x-1}{x-1}=1$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x-1}\le \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\le 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

3) $x\to \pi x$ est continue sur $\left]-\infty,1\right[$ et $x\to\cos x$ est continue sur IR donc la fonction $x\to\cos\pi x$ est continue sur $\left]-\infty,1\right[$. On a $x\to x$ est continue sur $\left]-\infty,1\right[$, donc $x\to x+\cos\pi x$ est continue sur $\left]-\infty,1\right[$.Or $x\to x-1$ est continue sur $\left]-\infty,1\right[$ $et\ x-1\ne 0$ donc f est continue sur $\left]-\infty,1\right[$ (A).

Continuité sur $[1,+\infty[$:On a $x\to x^2+x+2$ est une fonction polynôme continue sur IR et en particulier sur $[1,+\infty[$. Or $x^2+x+2=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}>0$, donc $x\to\sqrt{x^2+x+2}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

Ainsi $f: x\to\sqrt{x^2+x+2}-x$ est continue sur $[1,+\infty[$ (B).

Continuité à gauche en 1 : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+\cos\pi x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-1+1+\cos\pi x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}1+\dfrac{1+\cos\pi x}{x-1}$.

On pose $y=x-1$, lorsque x tend vers 1^-, alors y tend vers 0^-.

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1+\cos\pi x}{x-1}=\lim\limits_{y\to0^-}\dfrac{1+\cos(\pi y+\pi)}{y}=\lim\limits_{y\to0^-}\left(\dfrac{1-\cos\pi y}{\pi y}\right)\pi=\lim\limits_{z\to0^-}\left(\dfrac{1-\cos z}{z}\right)\pi=0\times\pi=0$.

Donc $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=1+0=1=f(1)=\sqrt{1+1+2}-1$ et donc f est continue à gauche en 1 (C).

D'après $(A),(B)\ et\ (C)$ f est continue sur IR.

4) a) f (0) = -1, $f\left(\dfrac{-1}{2}\right)=\dfrac{1}{3}$. Ainsi f est continue sur $\left]\dfrac{-1}{2},0\right[$ et $f(0)f\left(\dfrac{-1}{2}\right)<0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins $\alpha\in\left]\dfrac{-1}{2},0\right[$ tel que $f(\alpha)=0$.

b) $\alpha\in\left]\dfrac{-1}{2},0\right[\Rightarrow \pi\alpha\in\left]\dfrac{-\pi}{2},0\right[\Rightarrow \sin\pi\alpha<0$. On a $f(\alpha)=0\Leftrightarrow\dfrac{\alpha+\cos\pi\alpha}{\alpha-1}=0\Leftrightarrow\cos\pi\alpha=-\alpha$.

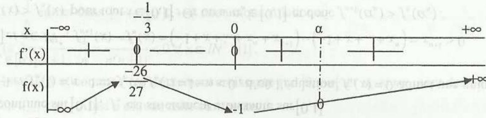
Or $\sin^2\pi\alpha=1-\cos^2\pi\alpha\Rightarrow|\sin\pi\alpha|=\sqrt{1-\cos^2\pi\alpha}$ et comme $\sin\pi\alpha<0$ donc $\sin\pi\alpha=-\sqrt{1-\alpha^2}$.

5) $x\to\cos x$ est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos x\ne 0$ et donc $x\to\dfrac{1}{\cos x}$ est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. D'autre part, on a $\dfrac{1}{\cos x}\in IR$ pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et comme f est continue sur IR donc $x\to f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$ est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Continuité à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$:

On a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\cos x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)=\dfrac{1}{2}$ et par suite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x)=\dfrac{1}{2}=g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. Ainsi g est continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$ et on conclut que g est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice N° 7 1)a) $g'(x)=6x^2+2x=2x(3x+1)$



b) *) sur $\left]-\infty,-\dfrac{1}{3}\right[$, g est continue et strictement croissante

donc $g\left(\left]-\infty,\dfrac{-1}{3}\right]\right)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty} g(x),g\left(\dfrac{-1}{3}\right)\right]=\left]-\infty,\dfrac{-26}{27}\right]$; or $0\notin\left]-\infty,\dfrac{-26}{27}\right]$ donc l'équation g(x) = 0 n'admet pas une solution dans $\left]-\infty,\dfrac{-1}{3}\right]$.

*)Sur $\left[\dfrac{-1}{3},0\right]$ g est continue et strictement décroissante donc $g\left(\left[\dfrac{-1}{3},0\right]\right)=\left[g(0),g\left(\dfrac{-1}{3}\right)\right]=\left[-1,\dfrac{-26}{27}\right]$; or $0\notin\left[-1,\dfrac{-26}{27}\right]$ donc l'équation g(x) = 0 n'admet pas une solution dans $\left[\dfrac{-1}{3},0\right]$.

*) Sur $[0,+\infty[$ g est continue et strictement croissante donc $g([0,+\infty[)=[-1,+\infty[$ Or $0\in[-1,+\infty[$ donc l'équation g(x) = 0 admet un unique solution α. On a g(0) = -1 < 0 et g(1) = 2 > 0 donc $\alpha\in\left]0,1\right[$.

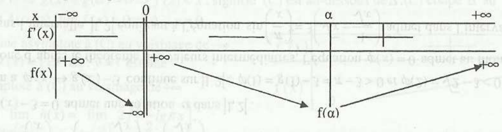
2) a) $f'(x)=\dfrac{1}{3}(2x+1-\dfrac{1}{x^2})=\dfrac{1}{3}\dfrac{2x^3+x^2-1}{x^2}=\dfrac{g(x)}{3x^2}$.

b) g admet $\dfrac{-26}{27}$ comme maximum absolu sur $\left]-\infty,0\right]$ donc $g(x)\le\dfrac{-26}{27}\ \forall x\in\left]-\infty,0\right]$.

Ainsi $g(x)\le 0\ \forall x\in\left]-\infty,0\right]$.

Si $0\le x\le\alpha\Rightarrow g(0)\le g(x)\le g(\alpha)$ (car g est croissante sur $[0,+\infty[$).Donc $-1\le g(x)\le 0$.

Si $x\ge\alpha\Rightarrow g(x)\ge g(\alpha)=0$.



c) $g(\alpha)=0\Leftrightarrow 2\alpha^3+\alpha^2-1=0\Leftrightarrow\alpha^3=\dfrac{1-\alpha^2}{2}$.

$f(\alpha)=\dfrac{\alpha^3+\alpha^2+1}{3\alpha}=\dfrac{\frac{1-\alpha^2}{2}+\alpha^2+1}{3\alpha}=\dfrac{1-\alpha^2+2\alpha^2+2}{6\alpha}=\dfrac{\alpha^2+3}{6\alpha}=\dfrac{\alpha}{6}+\dfrac{1}{2\alpha}$.

Exercice N°8 1) a) On a, pour tout $x\in\left]0,1\right[$, $-1\le\sin\dfrac{\pi}{x}\le 1\Rightarrow -\sqrt{x}\le\sqrt{x}\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\le\sqrt{x}$.

Or pour $0<x<1$, on a $0<1-x<1\Rightarrow\dfrac{1}{x-1}>1$.

$\dfrac{-\sqrt{x}}{x-1}\le\dfrac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1}\le\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\Rightarrow\dfrac{-\sqrt{x}}{x-1}\le f(x)\le\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ (*).

b) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\sqrt{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}=0$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0=f(0)$. Ainsi f est continue à droite en 0.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{x^2-2x}+x=0=f(0)$.Ainsi f est continue à gauche en 0.

On conclut que f est continue en 0.

c) D'après (*), on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\sqrt{x}}{x-1}\le\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\le\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\Rightarrow 0\le\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\le 0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)=1\times 0=0$.Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{t\to0}\sin t=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x}+x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)}{\sqrt{x^2-2x}-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1\right)}=1$

2) a) $(W(x))\times(VoU(x))=\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}\right)\times\left(\dfrac{\sin\left(\frac{\pi(x-1)}{x}\right)}{\frac{\pi(x-1)}{x}}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\right)\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{x}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)=f(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}(W(x))\times(VoU(x))$. On a $\lim\limits_{x\to1} U(x)=0\ et\ \lim\limits_{x\to0} V(x)=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to1} VoU(x)=1$.

D'autre part, on a $\lim\limits_{x\to1} W(x)=\pi$ donc $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\pi$ et par suite f admet un prolongement par continuité en 1. Ce prolongement est la fonction g définie par $\begin{cases} g(x)=f(x)\ si\ x\in IR_+^*\setminus\{1\} \\ g(1)=\pi \end{cases}$

c) $\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)=3\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=3\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}\right)$; cette équation admet dans l'intervalle $\left]1,2\right[$ une solution équivaut à $g(x)-3=0$ admet une solution α dans $\left]1,2\right[$.

On a $\varphi: x\to g(x)-3$ continue sur $\left]1,2\right[$, $\varphi(1)=g(1)-3=\pi-3>0\ et\ \varphi(2)=\sqrt{2}-3<0$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x)=0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $\left]1,2\right[$ équivaut à l'équation $\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)=3\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ admet dans l'intervalle $\left]1,2\right[$ une solution.

Exercice N° 9 1) On a $x\to f(x)\ et\ x\to x^n$ sont deux fonctions continues sur $[0,1]$ donc g_n est continue sur $[0,1]$.

$g_n(0)g_n(1)=f(0)(f(1)-2)$, or $f(x)\in[0,2]$ pour $x\in[0,1]$ d'où $g_n(0)g_n(1)\le 0$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins un réel $a_n\in[0,1]$ tel que $g_n(a_n)=0$.

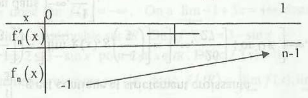
2) a) Soient a et b deux réels de $[0,1]$ tels que a < b, f étant strictement décroissante sur $[0,1]$ donc $f(a)>f(b)$.

$a<b\Leftrightarrow a^n<b^n\Leftrightarrow -a^n>-b^n\Rightarrow f(a)-a^n>f(b)-b^n$ Càd $g_n(a)>g_n(b)$ donc g_n est strictement décroissante sur $[0,1]$.

b) $g_n(x)=f(x)-x^n$, $g_{n+1}(x)=f(x)-x^{n+1}$. $g_{n+1}(x)-g_n(x)=x^n-x^{n+1}=x^n(1-x)\ge 0$ pour tout $x\in[0,1]$.

$\Rightarrow g_{n+1}(x)\ge g_n(x)$, ainsi $g_{n+1}(a_n)\ge g_n(a_n)$. Or $g_{n+1}(a_{n+1})=g_n(a_n)=0\Rightarrow g_{n+1}(a_n)\ge g_{n+1}(a_{n+1})$ et comme g_{n+1} est décroissante sur [0,1] et donc $a_{n+1}>a_n$; la suite (a_n) est strictement croissante.

Exercice N°10 1) f_n est dérivable sur[0 ;1] et $f_n'(x)=1+2x+3x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+nx^{n-1}>0$



2) f_n est continue sur $[0,1]$, f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.

$f_n(0)=-1\ et\ f_n(1)=n-1\Rightarrow f_n(0)f_n(1)=1-n<0$, d'où l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution $\alpha_n\in[0,1]$.

3) $x\in[0,1]\ et\ n\in IN^*$, $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\left(-1+x+\ldots+x^n+x^{n+1}\right)-\left(-1+x+\ldots+x^n\right)=x^{n+1}>0$.

Donc $f_{n+1}(x)>f_n(x)$ pour tout $x\in[0,1]$. Or on a $\alpha_n\in[0,1]$ et donc $f_{n+1}(\alpha_n)>f_n(\alpha_n)$.

Comme $f_n(\alpha_n)=f_{n+1}(\alpha_{n+1})=0\ et\ f_{n+1}(\alpha_n)=\alpha_n^{\,n+1}>0$ donc $f_{n+1}(\alpha_n)>f_{n+1}(\alpha_{n+1})$. Or f_{n+1} est strictement croissante sur $[0,1]$ donc $\alpha_{n+1}<\alpha_n$. Ainsi la suite $(\alpha_n)_{n\ge2}$ est strictement décroissante.

Autre Méthode : $f_{n+1}(\alpha_n)=f_n(\alpha_n)+\alpha_n^{\,n+1}=\alpha_n^{\,n+1}>0$. Or $f_{n+1}(\alpha_{n+1})=0$ donc $f_{n+1}(\alpha_n)\ge f_{n+1}(\alpha_{n+1})$.

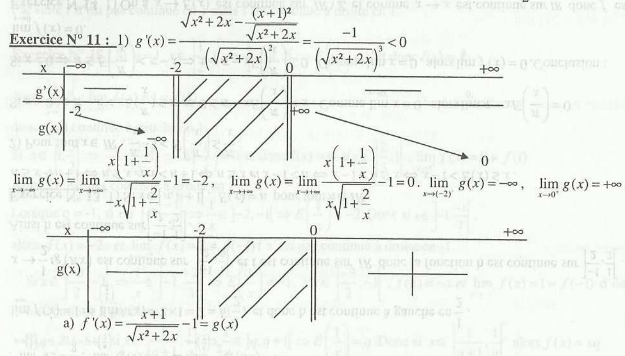
Comme f_{n+1} set strictement croissante sur $[0,1]$, donc $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$ et par suite la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

4) On a $f(\alpha_n)=0 \Leftrightarrow -1+\alpha_n+\alpha_n^2+...+\alpha_n^n=0 \Rightarrow -1+\alpha_n\dfrac{1-\alpha_n^n}{1-\alpha_n}=0 \; si \; \alpha_n \neq 1$.

Pour $\alpha_n \neq 1$, on a : $\dfrac{\alpha_n-\alpha_n^{n+1}}{1-\alpha_n}=1$ alors $\alpha_n-\alpha_n^{n+1}=1-\alpha_n$ et donc $\alpha_n=\dfrac{1+\alpha_n^{n+1}}{2}$.

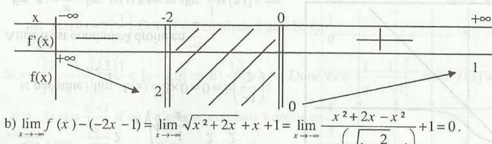
Pour $\alpha_n=1$, on a $\dfrac{1+1}{2}=1 \Rightarrow$ vrai pour $\alpha_n=1$. Conclusion : pour tout $n\geq 2$, on a $\alpha_n=\dfrac{1+\alpha_n^{n+1}}{2}$.

Exercice N° 11 : 1) $g'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x}-\dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}}}{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2}=\dfrac{-1}{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^3}<0$



$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}-1=-2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}-1=0$. $\lim\limits_{x\to(-2)^-} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=+\infty$.

a) $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}-1=g(x)$



b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-2x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}+x+1=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x-x^2}{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}+1=0$.

Donc la droite $\Delta: y=-2x-1$ est une asymptote oblique à ζ_f au voisinage de $-\infty$.

3)a) f est continue strictement décroissante sur $]-\infty,-2[\Rightarrow f\left(]-\infty,-2[\right)=\left]\lim\limits_{x\to-2^-} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[=]-\infty,-2[$.

Comme $\dfrac{1}{n}\notin]-\infty,-2[\ \forall n\in IN^*\setminus\{1\}$, alors l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ n'a pas de solution dans $]-\infty,-2[$.

f est continue strictement croissante sur $]0,+\infty[\Rightarrow f\left(]0,+\infty[\right)=\left]\lim\limits_{x\to0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]0,+\infty[$.

Comme $\dfrac{1}{n}\in]0,+\infty[\ \forall n\in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, alors il existe un unique réel $u_n\in]0,+\infty[$ tel que $f(u_n)=\dfrac{1}{n}$. On conclut que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet dans $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ une unique solution u_n.

b) $f(u_{n+1})-f(u_n)=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{-1}{n(n+1)}<0\ \forall n\in IN^*\setminus\{1\}$.

Donc $f(u_{n+1})<f(u_n)$ et comme f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et u_n et u_{n+1} sont deux éléments de $]0,+\infty[$, donc $u_{n+1}<u_n$. Ainsi u est une suite croissante.

Exercice N°12 : 1)a) f est dérivable sur IR,

$f'(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+1}-\dfrac{8x^2}{2\sqrt{4x^2+1}}}{4x^2+1}=\dfrac{8x^2+2-8x^2}{2(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1}}=\dfrac{1}{(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1}}>0\ \forall x\in IR$.

Donc f est strictement croissante sur IR.

b) $2\times0-x=-x\in IR$, $f(2\times0-x)=f(-x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}}$.

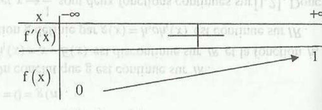
$\Rightarrow f(2\times0-x)+f(x)=1=2\times\dfrac{1}{2}$ et donc $I\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C).

2) a) On pose $g(x)=f(x)-x$, $g'(x)=f'(x)-1$. Or $4x^2+1\geq1$ et $\sqrt{4x^2+1}\geq1\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc $(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1}\geq1 \Rightarrow \dfrac{1}{(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1}}\leq1 \Rightarrow f'(x)-1=g'(x)\leq0$, ainsi g est strictement décroissante sur IR et donc $g(IR)=\left]\lim\limits_{+\infty} g(x), \lim\limits_{-\infty} g(x)\right[=IR$.

Comme $0\in IR$, il existe un unique $\alpha\in IR$ tel que $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow$ l'équation f(x) = x admet une unique solution α. $g(1)=f(1)-1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt5}-1=\dfrac{1}{\sqrt5}-\dfrac{1}{2}<0$, $g\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{6}{\sqrt{13}}>0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\alpha\in\left]\dfrac{3}{4},1\right[$.

b) Si $x\leq\alpha \Rightarrow g(x)\geq g(\alpha)=0 \Rightarrow f(x)\geq x$, signifie (C) est au-dessus de $\Delta: y=x$.
Si $x>\alpha \Rightarrow g(x)<g(\alpha)=0 \Rightarrow f(x)<x$, signifie (C) est au-dessous de Δ.(C) coupe Δ au point $A(\alpha,\alpha)$. $\lim\limits_{-\infty} f(x)=0 \Rightarrow \Delta_1: y=0$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.
$\lim\limits_{+\infty} f(x)=1 \Rightarrow \Delta_2: y=1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$



3) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+} h(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+} 2f\left(\dfrac{1}{2}tg\pi x\right)$,

on a $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+} \pi x=-\dfrac{\pi}{2}$

et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\pi}{2}\right)^+} tgx=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+}\dfrac{1}{2}tg\pi x=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$

et par suite $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+} h(x)=2\times0=0=h\left(\dfrac{-1}{2}\right)$.

Ainsi h est continue à droite en $\dfrac{-1}{2}$

. $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)} \pi x=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)} tg(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)}\dfrac{1}{2}tg(\pi x)=+\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f(x)=1 \Rightarrow \lim\limits_{\left(\frac{1}{2}\right)^-} h(x)=2\times1=2=h(\frac{1}{2})$ et donc h est continue à gauche en $\dfrac{1}{2}$.

$x\to\dfrac{1}{2}tg(\pi x)$ est continue sur $\left]\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$ et f est continue sur IR donc la fonction h est continue sur $\left]\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$.

Ainsi h est continue sur $\left[\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

Exercice N° 13 1) Si $x\in[n,n+1[$, $E(x)=n$ pour tout $n\in IR$.
$n\leq x<n+1 \Leftrightarrow n\leq x \; et \; x<n+1 \Leftrightarrow n\leq x \; et \; x-1<n \Leftrightarrow x-1<n\leq x \Leftrightarrow x-1<E(x)\leq x$.

2) Pour tout $x\in IR^*$, $\dfrac{\pi}{x}-1<E\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\leq\dfrac{\pi}{x}$.

Si $x>0 \Rightarrow \pi-x<xE(\frac{\pi}{x})\leq\pi \Rightarrow 0\leq\pi-xE\left(\dfrac{\pi}{x}\right)<x$. Comme $\lim\limits_{x\to0^+} x=0$, alors $\lim\limits_{0^+}\pi-xE\left(\dfrac{\pi}{x}\right)=0$.

Si $x<0 \Rightarrow \pi\leq E\left(\dfrac{\pi}{x}\right)<\pi-x \Rightarrow x<\pi-xE\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\leq0$. Comme $\lim\limits_{0^-} x=0$, alors $\lim\limits_{0^-} f(x)=0$. Conclusion : $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$.

Exercice N°14 1) On a $x\to E(x)$ est continue sur $IR\setminus\mathbb{Z}$ et comme $x\to x$ est continue sur IR donc f est continue sur $IR\setminus\mathbb{Z}$.
Continuité de f en $n\in\mathbb{Z}$: $f(n)=n-(n-n)^2=n$.
Si $x\in[n,n+1[\Rightarrow E(x)=n \Rightarrow \lim\limits_{x\to n^+} f(x)=\lim\limits_{x\to n^+} n-(x-n)^2=n=f(n)$.
Si $x\in[n-1,n[\Rightarrow E(x)=n-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to n^-} f(x)=\lim\limits_{x\to n^-}(n-1)-[x-(n-1)]^2=n-2$. f est continue en n équivaut à n = n -2 alors 0 = -2 ce qui est impossible Donc f est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$. Le domaine de continuité de f est $IR\setminus\mathbb{Z}$.

$g(x)=x-E(x)-[x-E(x)]^2$, g est continue sur $IR\setminus\mathbb{Z}$.
Continuité sur $\mathbb{Z}$. Soit $n\in\mathbb{Z}$, $g(n)=n-n-[n-n]^2=0$. $\lim\limits_{x\to n^+} g(x)=\lim\limits_{x\to n^+} x-n-[x-n]^2=0=g(n)$.
$\lim\limits_{x\to n^-} g(x)=\lim\limits_{x\to n^-} x-(n-1)-[x-(n-1)]^2=1-1=0=g(n)$.
Donc g est continue en tout point n dans $\mathbb{Z}$. On conclut que g est continue sur IR.
2) Faux car la fonction h_1 définie sur IR par $h_1(x)=x-E(x)$ est discontinue sur IR et la fonction h_2 définie par $h_2(x)=x-x^2$ est continue sur IR La fonction g définie par $g(x)=h_2oh_1(x)$ est continue sur IR.

Exercice N°15 $x\to\dfrac{f(x)}{x}$ 1) On a $x\to f(x) \; et \; x\to\dfrac{1}{x}$ sont deux fonctions continues sur $[1,2]$. Donc la fonction est continue sur $[1,2]$. On a $1\leq x\leq2 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\leq\dfrac{1}{x}\leq1$ et comme on a $3\leq f(x)\leq4$ pour tout $x\in[1,2]$ donc $\dfrac{3}{2}\leq\dfrac{f(x)}{x}\leq4$. Ainsi on a : $x\to\dfrac{f(x)}{x}$ est continue sur $[1,2]$, $\dfrac{3}{2}\leq\dfrac{f(x)}{x}\leq4$ et $\dfrac{3}{2}\leq2\leq4$ et par suite l'équation $\dfrac{f(x)}{x}=2$ admet au moins une solution α dans $[1,2]$.

2) f dérivable sur $[1,2]$ et $f'(x)>2$ alors f est strictement croissante sur $[1,2]$. On a $\dfrac{f(x)}{x}=2$ admet une unique solution α dans $[1,2]$ équivaut à $h(x)=f(x)-2x=0$ admet une unique solution α dans $[1,2]$.
D'après 1) l'équation h(x)=0 admet au moins une solution α dans $[1,2]$.
$h'(x)=f'(x)-2>0$, alors h est strictement croissante sur $[1,2]$ et donc α est unique.

Exercice N° 16 1) $f(-1)=\dfrac{-3}{2}$, $f\left(\dfrac{-1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$, $f(0)=\dfrac{-1}{2}$ et $f(1)=\dfrac{1}{2}$. f est continue sur $\left[-1,\dfrac{-1}{2}\right]$, $\left[\dfrac{-1}{2},0\right]$ et $[0,1]$. Or $f(-1)f\left(\dfrac{-1}{2}\right)<0$, $f\left(\dfrac{-1}{2}\right)f(0)<0$ et $f(0)f(1)<0$ donc il existe $x_1\in\left]-1,\dfrac{-1}{2}\right[$, $x_2\in\left]\dfrac{-1}{2},0\right[$ et $x_3\in]0,1[$ vérifiant $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$.

2)a) $\cos(3\alpha)=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos(2\alpha)\cos\alpha-\sin(2\alpha)\sin\alpha=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha\sin\alpha$
$=\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1-2\sin^2\alpha)=\cos\alpha(4\cos^2\alpha-3)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

b) On pose $X=\cos\alpha$; $f(x)=0 \Leftrightarrow 4\cos^3\alpha-3\cos\alpha-\dfrac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \cos(3\alpha)-\dfrac{1}{2}=0$

$\Leftrightarrow \cos3\alpha=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3\alpha=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \; ou \; 3\alpha=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2k\pi}{3} \; ou \; \alpha=-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$ Ainsi les solutions de l'équation sont $\cos\dfrac{\pi}{9}$, $\cos\dfrac{5\pi}{9}$ et $\cos\dfrac{7\pi}{9}$.

Exercice N° 17 : 1) On a : $\forall x\in IR$; $E(x)=-1 \Leftrightarrow x\in[-1;0[\Rightarrow D_f=]-\infty;-1[\cup[0,+\infty[$

2) ,On a : $\forall x\in[-2;-1[$; $E(x)=-2$ *et* $f(x)=-\cos\pi x$, d'où $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(-\cos\pi x)=1$ donc f se prolonge par continuité en -1. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\cos\pi x=-1$ et $f(1)=-\frac{1}{2}$

3) ,On a : $\forall x\in[0;1[$; $E(x)=0$ *et* $f(x)=-\cos\pi x$ (*), D'où $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\cos\pi x=1$ et $f(0)=1$ donc f est continue en 0.D'après (*) ; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\cos\pi x=-1$ et $f(1)=-\frac{1}{2}$

$\forall x\in[1;2[$; $E(x)=1$ *et* $f(x)=\frac{1}{2}\cos\pi x$ d'où $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{1}{2}\cos\pi x\right)=-\frac{1}{2}$ et $f(1)=-\frac{1}{2}$

Par suite f n'est pas continue en 1 mais f est continue à droite en 1.

Exercice N° 18 : Si $q=1, x\in\left]\frac{1}{2},1\right[\Rightarrow\frac{1}{x}\in]1,2[\Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right)=1$ et donc f(x) = x

$\forall x\in\left]\frac{1}{2},1\right[$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=1=f(1)$

donc f est continue à gauche en 1.

Si $x\in\left]1,\frac{3}{2}\right[\Rightarrow\frac{1}{x}\in\left]\frac{2}{3},1\right[\Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right)=0$ et donc f(x) = 0 $\forall x\in\left]\frac{2}{3},1\right[$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=0\neq f(1)$

Ainsi f n'est pas continue à droite en 1.

Lorsque q = -1, si $x\in\left]-1,\frac{-1}{2}\right[\Rightarrow\frac{1}{x}\in]-2,-1[\Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right)=-2$.Donc si $x\in\left]-1,\frac{-1}{2}\right[$,

alors $f(x)=-2x$ *et* $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=2\neq f(-1)$ f n'est pas continue à droite en -1.

Si $x\in\left]\frac{-3}{2},-1\right[\Rightarrow\frac{1}{x}\in\left]-1,\frac{-2}{3}\right[\Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right)=-1$. $\forall x\in\left]\frac{-3}{2},-1\right[$, $f(x)=-x$ *et* $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=1=f(-1)$ d'où f est continue à gauche en -1.

Si $q\in\mathbb{Z}\backslash\{-1,1\}$, si $x\in\left]\frac{1}{q+1},\frac{1}{q}\right[\Rightarrow\frac{1}{x}\in]q,q+1[\Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right)=q$.Donc si $x\in\left]\frac{1}{q+1},\frac{1}{q}\right[$ alors $f(x)=xq$.

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{q}\right)^-} f(x)=1=f\left(\frac{1}{q}\right)$ Donc f est continue à gauche en $\frac{1}{q}$.

Si $x\in\left]\frac{1}{q},\frac{1}{q-1}\right[\Rightarrow\frac{1}{x}\in]q-1,q[\Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right)=q-1$.Donc $\forall x\in\left]\frac{1}{q},\frac{1}{q-1}\right[$, alors $f(x)=x(q-1)$ et

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{q}\right)^+} f(x)=\frac{q-1}{q}$ d'où f n'est pas continue à droite en $\frac{1}{q}$.

2) Soit $n\in\mathbb{Z}$, $x\in[n,n+1[\Rightarrow E(x)=n$.

$n\le x<n+1\Leftrightarrow x-1<n\le x$ signifie $x-1<E(x)\le x$. $\forall x\in\mathbb{Z}^*$, $\frac{1}{x}-1\le E\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{x}$.

Ainsi $\forall x>0$, $1-x<xE\left(\frac{1}{x}\right)\le1$ *et* $\forall x<0$, $1\le xE\left(\frac{1}{x}\right)<1-x$.

$\lim\limits_{x\to0^+}1-x\le\lim\limits_{x\to0^+}xE\left(\frac{1}{x}\right)\le1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1=f(0)$. Ainsi f est continue à droite en 0.

$1\le\lim\limits_{x\to0^-}xE\left(\frac{1}{x}\right)\le\lim\limits_{x\to0^-}1-x\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1=f(0)$. Ainsi f est continue à gauche en 0.

On conclut que f est continue en 0.

Exercice N° 19: L'application $h: IR\to IR$
$x\mapsto f(x)-g(x)$

est continue sur IR et ne s'annule pas sur IR donc elle garde une signe constante.
soit par exemple $h(x)>0\ \forall\ x\in IR$; $f(x)>g(x)\ \forall\ x\in IR$ (1). Or $f(x)\in IR\ \ \forall\ x\in IR$ alors si on remplace x par f(x) dans (1) on obtient $f(f(x))>g(f(x))=g(f(x))$ (2)

et si on remplace x par g(x) dans (1) on obtient $f(g(x))>g(g(x))$ (3)

(2) et (3) $\Rightarrow f(f(x))>g(g(x))$ alors $f\circ f(x)-g\circ g(x)>0$ donc $f\circ f(x)-g(g(x))\neq0\ \forall\ x\in IR$.

Donc l'équation $f\circ f(x)=g\circ g(x)$ n'a pas de solution.

Exercice N° 20 : Soit $x\in]0;1]\Leftrightarrow\frac{1}{x}\ge1$ *et* $E\left(\frac{1}{x}\right)=p\in IN^*$; donc $p\le\frac{1}{x}\le p+1$, *ou* $\frac{1}{p+1}<x<\frac{1}{p}$. Par suite $f(x)=\frac{1}{p+1}$ *si* $x\in\left]\frac{1}{p+1};\frac{1}{p}\right[$ et $f(x)=0$ *si* $x=\frac{1}{p}$. Il en résulte que $\forall x\in]0;1]$; $0\le f(x)\le x$ or f est une fonction impaire sur $[-1;1]$, D'où $\forall x\in[-1;0[$; $0\le f(-x)<-x\Leftrightarrow0\le-f(x)<-x$ Par suite $\forall x\in[-1;1]$; $|f(x)|\le|x|$. En outre $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$ D'où $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ et comme $f(0)=0$

donc f est continue en 0.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

SOLUTION DES EXERCICES RELATIFS AU CHAPITRE

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Exercice N° 1 1)a) Vrai : $U_{n+1}=\frac{1}{3}U_n\Rightarrow U$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b) Faux : $V_1-V_0=1$ *et* $V_2-V_1=\frac{1}{3}\neq1$.

c) Faux car $U_0+U_1+...+U_n=U_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$.

d) Faux : Comme $V_n=V_{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\Rightarrow V_n=V_0+\left[1+\frac{1}{3}+...+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]=1+\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.

2) a) Faux : $U_{n+1}-U_n=\frac{c^n}{10^n}\left(\frac{c}{10}-1\right)<0$;   b) Vrai ;   c) Vrai ;   d) Faux

3)a) Vrai : en effet si U converge vers l, alors U² converge vers l².

b) Faux : contre exemple : $U_n=(-1)^n$, $U_n{}^2=1$ qui converge vers 1 mais $U_n=\begin{cases}1\ si\ n\ pair\\-1\ si\ n\ impair\end{cases}$ n'admet pas de limite.

c) Faux : contre exemple : $U_n=(-1)^n$, $|U_n|\le1$ et U diverge .

d) Vrai : théorème.

e) Vrai, en effet si $m\le U_n{}^2\le M\Rightarrow0\le|U_n|\le\sqrt{M}$ et donc U est bornée.

Exercice N° 2 1) b) et c)   2) b) et c)   3) c) et d)   4) a) et d)   5) b) et c).

Exercice N° 3 1) Faux : contre exemple : $U_n=(-1)^n=\begin{cases}1\ si\ n\ \ pair\\-1\ \ si\ n\ impair\end{cases}$ n'admet pas de limite, U diverge mais $U_{2n}=1$ *et* $U_{2n+1}=-1$ sont deux suites convergentes.

2) $U_{2n}=\frac{1-2n}{1+2n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}U_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2n}{2n}=-1$; $U_{2n+1}=\frac{1+2n+1}{-1+2n+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}U_{2n+1}=1$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}U_{2n}\neq\lim\limits_{n\to+\infty}U_{2n+1}$ donc (U_n) est divergente. (Faux)

3) $U_{2n}=\frac{2n}{2n+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}U_{2n}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_{2n+1})=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-(2n+1)}{3n+2}\right)=-1$. Donc (U_n) est divergente. (Faux)

4) $U_1=U_0+\left(-\frac{1}{3}\right)^0$; $U_2=U_1+\left(-\frac{1}{3}\right)^1$; .... ; $U_n=U_{n-1}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Donc $U_n=U_0+\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^0+\left(-\frac{1}{3}\right)^1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+....+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]=U_0+\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{3}}=1+\frac{3}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$

$\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$ (Vrai)

5) $U_1=f(U_0)=f(6)=5<U_0=6$ donc (U_n) est décroissante (Faux).

6) $\frac{k}{2n^2+1}\le U_k\le\frac{k}{2n^2}\Leftrightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+1}\le\sum\limits_{k=1}^{n}U_k\le\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}\Leftrightarrow\frac{n(n+1)}{2(2n^2+1)}\le S_n\le\frac{n(n+1)}{2(2n^2)}$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2(2n^2+1)}=\frac{1}{4}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2(2n^2)}=\frac{1}{4}$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{4}$ (Vrai)

7) Faux : contre exemple : $U_n=-\frac{1}{n}$ *et* $V_n=1+\frac{1}{n}$

8) Vrai : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n+2}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}U_n-5=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=5$.

9) Faux : contre exemple : $U_n=-2-(-1)^n\Rightarrow-3\le U_n\le-1\Rightarrow U$ est minorée par -3.Mais U est divergente.

10) Faux : contre exemple : $U_n=\frac{1}{n+1}$ *et* $V_n=\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n-V_n=0$ mais les deux suites U et V sont décroissantes.

11) Faux : démonstration par l'absurde.
Si U est minorée par m, alors $m\le\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ ce qui est impossible car $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=-\infty$.

12) Faux : contre exemple : $U_n=n^2$ *et* $V_n=-4n$

Exercice N° 4 On a $1-\frac{1}{k^2}=\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{k-1}{k}\times\frac{k+1}{k}$

$\Rightarrow1-\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}$

$1-\frac{1}{3^2}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}$

:

$1-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}$

Donc $U_n=\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times...\times\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times...\times\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}$ qui converge vers $\frac{1}{2}$.

On a $1-\frac{2}{k(k+1)}=\frac{k-1}{k}\times\frac{k+2}{k+1}$, on montre que $V_n=\frac{n+2}{3n}$ qui converge vers $\frac{1}{3}$.

Exercice N° 5 a)On a $\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\Rightarrow U_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{n}$ qui converge vers 1.

b) On a $V_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ or $(k-1)k\le k^2\ \forall k\ge 2\Rightarrow\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\le\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k}\Rightarrow V_n-1\le U_n$.

c) $V_{n+1}-V_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0\Rightarrow V$ est une suite croissante ; or V est majorée par 2

car $V_n\le U_n+1$ et $U_n=1-\frac{1}{n}<1$ et donc V converge vers un réel $\alpha\Rightarrow\alpha\le 2$

On a $V_n\ge V_2\ge 1$ alors $\alpha>1$ et par suite $\alpha\in\left]1,2\right]$.

Exercice N° 6 :

1)a) $\forall k\in\{1,2,...,n\},1\le k\le n\Rightarrow 1+n^2\le k+n^2\le n+n^2\Rightarrow\frac{1}{n^2+n}\le\frac{1}{n^2+k}\le\frac{1}{1+n^2}$

$\Rightarrow\frac{n}{n^2+n}\le\frac{n}{n^2+k}\le\frac{n}{n^2+1}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+n}\le U_n\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+1}\Rightarrow\frac{n^2}{n^2+n}\le U_n\le\frac{n^2}{n^2+1}$.

b)Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$, alors $\lim_{n\to+\infty}U_n=1$

2) $\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\Rightarrow V_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)=\frac{1}{n}\sqrt{n}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}V_n=0$.

3)a)Puisque $\forall t\in\mathbb{R},\ t-1<E(t)\le t\Rightarrow kt-1<E(kt)\le kt$

b) $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kt-1)\le\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}E(kt)\le\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}kt\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\frac{1}{n^2}\left[t\sum_{k=1}^{n}k-1\right]\le W_n\le\frac{1}{n^2}\left(t\sum_{k=1}^{n}k\right)$

$\Rightarrow\frac{n+1}{2n}t-\frac{1}{n}\le W_n\le\frac{n+1}{2n}t$ Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}t-\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}t=\frac{t}{2}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}W_n=\frac{t}{2}$.

4) $\forall n\ge 5,U_n=\left(C_n^0\right)^{-1}+\left(C_n^1\right)^{-1}+\sum_{k=2}^{n-2}\left(C_n^k\right)^{-1}+\left(C_n^{n-1}\right)^{-1}+\left(C_n^n\right)^{-1}=2\left(1+\frac{1}{n}\right)+\sum_{k=2}^{n-2}\left(C_n^k\right)^{-1}$.

Comme $\forall k\in\{2,..,n-2\},\ C_n^k\ge C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$, on a : $0\le\sum_{k=2}^{n-2}\left(C_n^k\right)^{-1}\le(n-3)\frac{2}{n(n-1)}$

$\Rightarrow 0\le\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n-2}\left(C_n^k\right)^{-1}\le\lim_{n\to+\infty}\frac{2(n-3)}{n(n-1)}=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}U_n=2$.

Exercice N° 7 :

1) a) $\forall x\in\left]0,1\right[,\ f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}>0,\ f(x)-x=x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)=x\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\right]<0$

$\Rightarrow 0<f(x)<x\ \forall x\in\left]0,1\right[$

b) On a $\forall x\in\left]0,1\right[,\ g(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0,\ g(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+1}\right)}<0\ \forall x\in\left]0,1\right[$

2) a) Pour n= 0, on a : $0<U_0=\frac{1}{2}<1$, vrai pour n = 0.

Supposons que $0<U_n<1$, montrons que $0<U_{n+1}<1$.

D'après 1) , on a : $0<f\left(U_n\right)<U_n<1\Rightarrow 0<U_{n+1}<1$. Donc $0<U_n<1\ \forall n\in\mathbb{N}$.

b) $\forall n\in\mathbb{N},0<U_n<1$ et d'après 1) b) , on aura :

$0<g\left(U_n\right)\le\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow 0<\frac{U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow 0<\frac{U_n^2}{\sqrt{U_n^2+1}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}U_n\Rightarrow 0<U_{n+1}\le\frac{1}{\sqrt{2}}U_n$.

c) On a : $0<U_1\le\frac{1}{\sqrt{2}}U_0,\ 0<U_2\le\frac{1}{\sqrt{2}}U_1,...,0<U_n\le\frac{1}{\sqrt{2}}U_{n-1}$.

En multipliant ces inégalités et en simplifiant, on trouve :

$0<U_n\le\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^nU_0=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n<\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\ \forall n\in\mathbb{N}$ et comme $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}U_n=0$.

Exercice N° 8 : 1) $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{a}{n+1}$

2) a) $\frac{a}{n+1}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow n+1\ge 2a\Rightarrow n\ge 2a-1$. Posons n_0 le plus grand des entiers E(2a-1) +1 et 0 avec E(2a-1) la partie entière de (2a-1). Ainsi $n\ge n_0\Rightarrow n\ge 2a-1\Rightarrow\frac{a}{n+1}\le\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{U_{n+1}}{U_n}\le\frac{1}{2}\Rightarrow U_{n+1}\le\frac{1}{2}U_n$

b) $\forall n\ge n_0,\ U_{n+1}\le\frac{1}{2}U_n\Rightarrow 0<U_{n_0+1}\le\frac{1}{2}U_{n_0},\ 0<U_{n_0+2}\le\frac{1}{2}U_{n_0+1},...,U_n\le\frac{1}{2}U_{n-1}$.

En multipliant membre à membre ces inégalités puis en simplifiant, on obtient :

$\forall n\ge n_0,0<U_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}U_{n_0}$ et comme $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}U_n=0$

c) $\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+n!}{8^n+n!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!\left(\frac{3^n}{n!}+1\right)}{n!\left(\frac{8^n}{n!}+1\right)}=\frac{0+1}{0+1}=1$ (car $\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0$)

$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{2^n+5^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{2^n+5^n}{n!}}=\frac{1}{\frac{2^n}{n!}+\frac{5^n}{n!}}=+\infty$

3) $\frac{n^{n-1}}{n!}=\frac{n}{n}\times\frac{n}{n-1}\times...\times\frac{n}{2}\ge 1$ car $\frac{n}{n-k}>1\ \forall k\in\{0,1,...,n-2\}\Rightarrow\frac{n^n}{n!}=\frac{n^{n-1}}{n!}n\ge n\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{n!}=+\infty$

Exercice N° 9 : On a $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\le U_n\le 1$ et $V_n\ge 0$; en multipliant par V_n, on obtient :

$0\le U_nV_n\le V_n\le 1$ et comme $\lim_{n\to+\infty}U_nV_n=1\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}V_n=1$

On a $0\le V_n\le 1$ et $U_n\ge 0\Rightarrow 0\le U_nV_n\le U_n\le 1$ et comme $\lim_{n\to+\infty}U_nV_n=1\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}U_n=1$.

Exercice N° 10 : 1) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ U_3=\frac{1}{2}U_1,U_5=\frac{3}{4}U_3,...,U_{2n+1}=\frac{2n-1}{2n}U_{2n-1}$;en multipliant tous les termes et en simplifiant, on obtient :

$U_{2n+1}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times...\times\frac{2n-1}{2n}U_1=\frac{1\times 2\times....\times(2n-1)}{(2\times 4\times 6\times...\times 2n)^2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{(2n-1)!}{2^{2n}(n!)^2}\times\frac{\pi}{2}$

$U_4=\frac{2}{3}U_2,U_6=\frac{4}{5}U_4,...,U_{2n+2}=\frac{2n}{2n+1}U_{2n}$; en multipliant tous les termes puis en simplifiant, on obtient :

$U_{2n+2}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times...\times\frac{2n}{2n+1}U_2=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

2) On a U est décroissante et $U_{2n+1}>0\Rightarrow\frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}}<1$

$\frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}}=\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}\times\frac{U_{2n}}{U_{2n+1}}=\frac{2n}{2n+1}\times\frac{U_{2n}}{U_{2n+1}}$; or $\frac{U_{2n}}{U_{2n+1}}>1\Rightarrow\frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}}\ge\frac{2n}{2n+1}$

Ainsi $\frac{2n}{2n+1}\le\frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}}\le 1\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{2n+1}=1\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}}=1$

b) $\forall n\in\mathbb{N},\frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times...\times\frac{2n}{2n+1}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times....\times\frac{2n-1}{2n}\times\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{2\times 4\times 6\times...\times 2n}{3\times 5\times 7\times...\times(2n-1)}\right)^2\times\frac{2}{2n+1}\times\frac{1}{\pi}$

Comme

$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}}=1\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{2\times 4\times...\times 2n}{3\times 5\times...\times(2n-1)}\right)^2\times\frac{2}{2n+1}\times\frac{1}{\pi}\right]=1\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{2\times 4\times...\times 2n}{3\times 5\times...\times(2n-1)}\right)^2\times\frac{2}{2n+1}\right]=\pi$

Exercice N° 11 : 1) $U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}},\ U_{n+1}-U_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}>0$ et par suite U est croissante.

2) a) $U_{2n}-U_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n}}\ge\frac{1}{\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{2n}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n}}\ge n\frac{1}{\sqrt{2n}}\ge\sqrt{n}\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Supposons que U est majorée et comme U est croissante donc elle est convergente.

On pose $l=\lim_{n\to+\infty}U_n$; on a $U_{2n}-U_n\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow l-l\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow 0\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui est absurde.

Par suite U n'est pas majorée et comme U est croissante, alors elle diverge vers $+\infty$.

3) 2ième méthode : On a $U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ et comme $\frac{1}{\sqrt{k}}\ge\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\Rightarrow U_n\ge\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})=\sqrt{n}$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}U_n=+\infty$.

Exercice N° 12 : 1) $1\le k\le n\Rightarrow n+1\le n+k\le 2n\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2n}}\le\frac{1}{\sqrt{n+k}}\le\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. En faisant la somme pour k variant de 1 à n, on aura : $n\frac{1}{\sqrt{2n}}\le\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\le n\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Rightarrow\frac{\sqrt{2n}}{2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}\le\frac{n}{\sqrt{n+1}}$

et comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n}}{2}=+\infty\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}=+\infty$.

2) f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par f(x)= 1- x – cosx ; f'(x) = -1 + sinx ≤ 0 ; f admet en 0 un maximum absolu

$\Rightarrow f(x)\le 0\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos x\ge 1-x\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Si $1\le k\le n\Rightarrow 0\le\frac{1}{\sqrt{2n}}\le\frac{1}{\sqrt{n+k}}\le\frac{1}{\sqrt{n+1}}\le 1\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{1}{\sqrt{n+k}}\ge 1-\frac{1}{\sqrt{n+k}}$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)\ge n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}$ et d'après 1) , on déduit :

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)\ge\frac{1}{n}\left(n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)\ge\frac{1}{n}\left(n-\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Or

$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)\le 1\Rightarrow\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)\le 1$.

On conclut donc que $1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\le U_n\le 1$ et comme $\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}U_n=1$.

Exercice N° 13 1) a) $U_2=2+\frac{1^2}{U_1}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

b) Pour n= 2, $U_2=\frac{5}{2}\in\left]2,3\right[$ vrai pour n = 2.

Supposons que $n<U_n<n+1$ et montrons que $n+1<U_{n+1}<n+2$.

On a $n<U_n<n+1\Rightarrow\frac{1}{n+1}<\frac{1}{U_n}<\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{n^2}{n+1}<\frac{n^2}{U_n}<\frac{n^2}{n}\Rightarrow 2+\frac{n^2}{n+1}<2+\frac{n^2}{U_n}<n+2$

$\Rightarrow\frac{(n+1)^2}{n+1}+\frac{1}{n+1}<U_{n+1}<n+2\Rightarrow n+1<n+1+\frac{1}{n+1}<U_{n+1}<n+2\Rightarrow n+1<U_{n+1}<n+2$.

Conclusion : $n<U_n<n+1\ \forall n\ge 2$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}n=+\infty\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}U_n=+\infty$.

On a $n<U_n<n+1\Rightarrow 1<\frac{U_n}{n}<\frac{n+1}{n}$ et comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=1$, alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{U_n}{n}=1$.

c) On a : $n<U_n<n+1<U_{n+1}\Rightarrow U_n<U_{n+1}$ et par suite U est croissante.

d) Supposons que U est majorée, alors elle est convergente ce qui est impossible car $\lim_{n\to+\infty}U_n=+\infty$. Donc U n'est pas majorée.

2) $W_n = \frac{1}{U_n - n} - 1$; a) $W_1 = \frac{1}{U_1 - 1} - 1 = \frac{1}{2-1} - 1 = 0$

$$W_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} - (n+1)} - 1 = \frac{1 - U_{n+1} + n + 1}{U_{n+1} - n - 1} = \frac{-n^2 + nU_n}{U_n + n^2 - nU_n} = \frac{1}{\frac{n^2 - nU_n + n + U_n - n}{(U_n - n)n}} = \frac{1}{W_n + \frac{1}{n}}$$

b) Pour n = 1, $1 - 1 \leq W_1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq W_1 \leq 1$, vrai pour n = 1.

Supposons que $1 - \frac{1}{n} \leq W_n \leq 1$ et montrons que $1 - \frac{1}{n+1} \leq W_{n+1} \leq 1$.

On a $1 - \frac{1}{n} \leq W_n \leq 1 \Rightarrow 1 \leq W_n + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{W_n + \frac{1}{n}} \leq 1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} \leq W_{n+1} \leq 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} \leq W_{n+1} \leq 1$.

Conclusion : $1 - \frac{1}{n} \leq W_n \leq 1 \; \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c)Comme $\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} W_n = 1$.

On a $W_n = \frac{1}{U_n - n} - 1 \Rightarrow U_n - n = \frac{1}{W_n + 1} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (U_n - n) = \frac{1}{2}$.

3) a) $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} kW_k, \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k(W_k - 1) = S_n - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = S_n - \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = S_n - \frac{n+1}{2n}$

b) $1 - \frac{1}{k} < W_k < 1 \Rightarrow -1 < k(W_k - 1) < 0 \Rightarrow -n < \sum_{k=1}^{n} k(W_k - 1) < 0 \Rightarrow \frac{-1}{n} < S_n - \frac{1+n}{2n} < 0 < \frac{1}{n} \Rightarrow \left|S_n - \frac{1+n}{2n}\right| \leq \frac{1}{n}$.

c) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty}\left(S_n - \frac{1+n}{2n}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Exercice N° 14 1) On a $U_0 = 1 \Rightarrow U_0 \geq 1$, vrai pour n = 0.

Supposons que $U_n \geq 1$ et montrons que $U_{n+1} \geq 1$.

$U_n \geq 1$ *et* $\frac{2}{U_n} \geq 0 \Rightarrow U_n + \frac{2}{U_n} \geq 1 \Rightarrow U_{n+1} \geq 1$. **Conclusion** : $U_n \geq 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$

b) $U_{n+1} - U_n = \frac{2}{U_n} \geq 0$ et donc U est croissante.

c) Supposons que U est majorée, alors elle est convergente. On pose $l = \lim_{n \to +\infty} U_n$.

On aura : $l = l + \frac{2}{l} \Rightarrow 2 = 0$ ce qui est impossible. Par suite U n'est pas majorée.Donc U diverge vers $+\infty$.

2)a) $V_{n+1} - V_n = \frac{(U_{n+1})^2}{4} - \frac{U_n^2}{4} = \frac{1}{4}\left(4 + \frac{4}{U_n^2}\right) = 1 + \frac{1}{U_n^2} \geq 1$

b) Pour n = 1, $V_1 = \frac{U_1^2}{4} = \frac{9}{4} \geq 1$, vrai pour n = 1.

Supposons que $V_n \geq n$ et montrons que $V_{n+1} \geq n + 1$.

On a $V_{n+1} \geq 1 + V_n \geq 1 + n$.

Conclusion : $V_n \geq n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Comme $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} V_n = +\infty$.

c)On a $V_n \geq n \Rightarrow 4V_n \geq 4n \Rightarrow U_n^2 \geq 4n \Rightarrow 1 + \frac{1}{U_n^2} \leq 1 + \frac{1}{4n} \Rightarrow 1 \leq V_{n+1} - V_n \leq 1 + \frac{1}{4n}$. Comme

$\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{4n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (V_{n+1} - V_n) = 1$

Exercice N° 15 $0 \leq U_0 = 0 \leq \frac{\pi}{2}$, vrai pour n = 0. Supposons que $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}$ et montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{\pi}{2}$.

La fonction cos est décroissent sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$

$\cos 0 \geq \cos(U_n) \geq \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 1 \geq \cos(U_n) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}\cos U_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 1$

Conclusion : $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2} \; \forall n \in \mathbb{N}$

2) a) $U_{n+1} > U_n$ *et* U_n *et* U_{n+1} sont dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors

$\cos(U_{n+1}) < \cos(U_n) \Rightarrow \frac{1}{2}\cos(U_{n+1}) < \frac{1}{2}\cos(U_n) \Rightarrow U_{n+2} < U_{n+1}$

$U_{n+2} < U_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2}\cos(U_{n+2}) > \frac{1}{2}\cos(U_{n+1}) \Rightarrow U_{n+3} > U_{n+2}$.

b) Supposons que U est croissante $\Rightarrow U_{n+2} > U_{n+1}$ ce qui est faux.

Supposons que U est décroissante $\Rightarrow U_{n+3} < U_{n+2}$ ce qui est faux.

Donc U n'est pas monotone.

3) $\frac{1}{2}\cos x = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x - x = 0$. On pose $g(x) = \frac{1}{2}\cos x - x$; g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

et $g'(x) = -\frac{1}{2}\sin x - 1 < 0 \; \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc g est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

D'autre part, on a : g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $g(0) \times g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ possède une seule solution α dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4) Par récurrence sur n. la propriété à montrer est "$U_n \neq \alpha \; \forall n \in \mathbb{N}$"

Pour n = 0, $\frac{1}{2}\cos U_0 = \frac{1}{2} \neq U_0 \Rightarrow U_0 \neq \alpha$, donc la propriété est vraie pour n= 0.

On suppose que la propriété est vraie à l'ordre n et montrons qu'elle est vraie à l'ordre n + 1.

D'après l'hypothèse de récurrence $U_n \neq \alpha \Rightarrow U_n > \alpha$ *ou* $U_n < \alpha$ et comme la fonction $x \mapsto \cos x$ est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc on aura $\frac{1}{2}\cos U_n < \alpha$ *ou* $\frac{1}{2}\cos U_n > \alpha$ ce qui donne que $U_{n+1} \neq \alpha$ et par suite la propriété est vraie à l'ordre n+1.

Conclusion : $U_n \neq \alpha \; \forall n \in \mathbb{N}$

5) a) On pose la fonction $k(x) = \sin x - x$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; la fonction k est dérivable sur

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *et* $k'(x) = \cos x - 1 \leq 0 \; \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi k est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow k(x) \leq k(0) = 0 \; \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin x \leq x \; \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

D'après ce qui précède on a : si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \Rightarrow (-x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin(-x) \leq (-x)$

$\Rightarrow \sin x \geq x \; \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. On conclut donc que $|\sin x| \leq |x| \; \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) On a $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos y\right| = \left|\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \; \forall (x, y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$

Si x et y dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \left|\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leq 1$

Si x et y dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \frac{x-y}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq \frac{|x-y|}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos y\right| \leq \frac{1}{2}|x - y|$

6) a) On a $U_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *et* $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \left|\frac{1}{2}\cos U_n - \frac{1}{2}\cos\alpha\right| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha| \Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

b) d'après 6) a), on a :

$0 < |U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_0 - \alpha|$

$0 < |U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_1 - \alpha|$

....

$0 < |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_{n-1} - \alpha|$

En multipliant ces inégalités et en simplifiant, on obtient : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

c) D'après 6) b), on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$, par passage à la limite, on aura :

$\lim_{n \to +\infty} |U_n - \alpha| = 0$ et par suite $\lim_{n \to +\infty} U_n = \alpha$

7) a) Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k \Rightarrow S_{n+1} - S_n = U_{n+1} \geq 0$ et donc S est croissante.

b) Supposons que S_n est convergente vers un réel $l \Rightarrow 0 \geq \lim_{n \to +\infty} U_{n+1} \geq 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ce qui est absurde. Par suite la suite (S_n) ne peut être convergente.

c) Par l'absurde :supposons que (S_n) est majorée, comme (S_n) est croissante, alors elle converge ce qui est impossible. Ainsi (S_n) n'est pas majorée et puisque elle set croissante, alors elle diverge vers $+\infty$.

EXERCICE N°16 : 1) soit $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+2} = \frac{1}{(U_{n+1})^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{U_n^2}\right)^2}$ ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+2} = (U_n)^4$.

2) a) * Pour $n = 0$; $V_0 = U_1 = \frac{1}{U_0^2} = \frac{1}{4}$; $0 < V_0 < \frac{1}{2}$ (vérifiée)

* Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < V_n \leq \frac{1}{2}$ et montrons que $0 < V_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

On a : $V_{n+1} = U_{2n+3} = U_{2n+1+2} = (U_{2n+1})^4$ donc $V_{n+1} = V_n^4$; on a :

$0 < V_n \leq \frac{1}{2}$ donc $0 < V_n^2 \leq \frac{1}{16} \leq \frac{1}{2}$ d'où $0 < V_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ ainsi pour tout $n \geq 0$; $0 < V_n \leq \frac{1}{2}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$; On a : $0 < V_n \leq \frac{1}{2}$ donc $0 < V_n^3 \leq \frac{1}{8}$ d'où $0 < V_n^4 \leq \frac{1}{8}V_n$ ainsi pour tout n ; $0 < V_{n+1} \leq \frac{1}{8}V_n$.

c) Pour $n = 0$; $V_0 = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^0 = \frac{1}{4}$ donc $V_0 \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^0$ (vérifié)

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $V_n \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^n$ et montrons que $V_{n+1} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}$.

On a $V_n \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^n$ donc $\frac{1}{8}V_n \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}$ de plus $V_{n+1} \leq \frac{1}{8}V_n$ d'où $V_{n+1} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}$ Ainsi pour tout $n \geq 0$; $V_n \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^n$.

d) On a $0 < V_n \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^n$; $n \geq 0$; $\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^n = 0$ et par suite $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$

3) a) Pour $n = 0$; $W_0 = U_0 = 2$; $W_0 \geq 2$ (Vérifié)

Soit $n \in IN$; supposons que $W_n \geq 0$ et montrons que $W_{n+1} \geq 2$.

$W_{n+1} = U_{2n+2} = (U_{2n})^4 = W_n^4$. On a : $W_n \geq 2 \Leftrightarrow (W_n)^4 \geq 16 \geq 2 \Rightarrow W_{n+1} \geq 2$ ainsi pour tout $n \in IN$; $W_n \geq 2$.

b) On a : $W_n \geq 2 \Leftrightarrow W_n^3 \geq 8 \Leftrightarrow W_n^4 \geq 8W_n$ d'où $W_{n+1} \geq 8W_n$ pour tout $n \in IN$.

c) Pour $n = 0$; $W_0 = 2$ et $8^0 = 1$ donc $W_0 \geq 8^0$ (Vérifié)

Soit $n \in IN$; supposons que $W_n \geq 8^n$ et montrons que $W_{n+1} \geq 8^{n+1}$; On a : $W_n \geq 8^n \Leftrightarrow 8W_n \geq 8^{n+1}$ de plus $W_{n+1} \geq 8W_n$ d'où $W_{n+1} \geq 8^{n+1}$ ainsi pour tout $n \in IN$; $W_n \geq 8^n$.

4) On a : $V_n = U_{2n+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n+1} = 0$; On a $W_n = U_{2n}$ et $W_n \geq 8^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 8^n = +\infty$ car $8 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = +\infty$

Donc la suite (W_n) diverge vers $(+\infty)$.

Exercice N° 17 1) a) pour n = 0, $-1 < U_0 = -\frac{1}{2} < 0$, vrai pour n = 0. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $-1 < U_n < 0$ et montrons que $-1 < U_{n+1} < 0$. On a $-1 < U_n < 0 \Rightarrow 0 < 1 + U_n < 1$, de même on voit que $0 < U_n^2 < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{1+U_n^2}} < 1$. En multipliant les deux inégalités, on obtient :

$0 < \frac{1+U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{1+U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} - 1 < 0 \Rightarrow -1 < U_{n+1} < 0$.

Conclusion : $-1 < U_n < 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

b) $U_{n+1} - U_n = (1+U_n)\left[\frac{1}{\sqrt{1+U_n^2}} - 1\right] < 0$ et donc U est décroissante. U décroissante minorée par -1, alors U converge vers un réel l.

Soit $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$, $l \in [-1,0]$ car $-1 < U_n < 0$ et comme f est continue en l, alors l vérifie la relation :

$l = f(l) \Leftrightarrow (l+1)\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+l^2}}\right] = 0 \Leftrightarrow l = -1$ ou $\sqrt{1+l^2} = 1 \Leftrightarrow l = -1$ ou $l = 0$. Or U est décroissante, alors $l = -1$.

2) a) U est décroissante, alors $U_n \leq U_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow U_n^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{1+U_n^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{1+U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{5}}(1+U_n)$

$\Rightarrow 1 + U_{n+1} \leq \frac{2}{\sqrt{5}}(1+U_n)$

b) Par récurrence : pour n = 0, $U_0 + 1 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + U_0 \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^0$ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 + U_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$ et montrons que $1 + U_{n+1} \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n+1}$ On a $1 + U_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n+1}$

$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}(1+U_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n+1} \Rightarrow 1 + U_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n+1}$ **Conclusion :** $1 + U_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n\ \forall n \in \mathbb{N}$

c) On a : $0 < 1 + U_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \Rightarrow -1 < U_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n - 1$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -1$.

3) a) On a

$-1 < U_n < 0 \Rightarrow 0 < U_n^2 < 1 \Rightarrow 1 < 1 + U_n^2 < 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+U_n^2}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1+U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} > \frac{1+U_n}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 + U_{n+1} > \frac{1+U_n}{\sqrt{2}}$

b) On a $U_{k+1} + 1 > \frac{1+U_k}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}(1+U_{k+1}) - U_k > 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\left[\sqrt{2}(1+U_{k+1}) - U_k\right] > n+1 \Rightarrow V_n > n+1$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$.

4) On a $-1 < U_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n - 1 \Rightarrow -(n+1) < \sum_{k=0}^{n} U_k \leq \frac{1}{2}\frac{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}} - (n+1)$

$\Rightarrow -\frac{2(n+1)}{n} < \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n} U_k \leq \frac{\sqrt{5}\left[1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}{n(\sqrt{5}-2)} - \frac{2(n+1)}{n}$ On pose

$W_n = -\frac{2(n+1)}{n}$ et $T_n = \frac{\sqrt{5}\left[1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}{n(\sqrt{5}-2)} - \frac{2(n+1)}{n}$ Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \lim\limits_{n\to+\infty} T_n = -2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n} U_k = -2$.

Exercice N° 18 1) Par récurrence sur n. Pour n= 0, on a $U_0 = 5 > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$.

On a $2x^2 - x + 8 > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2U_n^2 - U_n + 8 > 0 \Rightarrow U_{n+1} > 0$. Conclusion : $U_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

2) On a $U_{n+1} - 2 = \frac{2U_n^2 - U_n + 8}{U_n^2 + 3} - 2 = \frac{2 - U_n}{U_n^2 + 3}$

3) Supposons que $U_n \geq 2$ et montrons que $U_{n+1} < 2$ et $U_{n+2} > 2$.

On a $U_{n+1} - 2 = \frac{2 - U_n}{U_n^2 + 3} = \frac{-(U_n - 2)}{U_n^2 + 3} < 0 \Rightarrow U_{n+1} < 2$. $U_{n+2} - 2 = \frac{2 - U_{n+1}}{U_{n+1}^2 + 3} = \frac{-(U_{n+1} - 2)}{U_{n+1}^2 + 3} > 0 \Rightarrow U_{n+2} > 2$

4) On a $U_0 = 5 > 2 \Rightarrow U_1 < 2$ et $U_2 > 2$ et par suite U n'est ni croissante ni décroissante.

Ainsi U n'est pas monotone.

5) Pour n = 0, on a $U_0 = 5 \neq 2$, vrai pour n = 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $U_n \neq 2$ et montrons que $U_{n+1} \neq 2$. On a $U_{n+1} - 2 = \frac{2 - U_n}{U_n^2 + 3} \neq 0$ car $U_n \neq 2$ et donc $U_{n+1} \neq 2$. Conclusion : $U_n \neq 2\ \forall n \in \mathbb{N}$.

6) On a $|U_{n+1} - 2| = \frac{|U_n - 2|}{U_n^2 + 3} \leq \frac{1}{3}|U_n - 2|$ puisque $U_n^2 + 3 \geq 3$ donc $\frac{1}{U_n^2 + 3} \leq \frac{1}{3}$

7)a) $0 < |U_1 - 2| \leq \frac{1}{3}|U_0 - 2|$

$0 < |U_2 - 2| \leq \frac{1}{3}|U_1 - 2|$

....

$0 < |U_n - 2| \leq \frac{1}{3}|U_{n-1} - 2|$

En multipliant ces inégalités puis en simplifiant, on obtient : $|U_n - 2| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |U_0 - 2|\ \forall n \in \mathbb{N}$. Comme

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$.

8) $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$; a) $S_{n+1} - S_n = U_{n+1} > 0$ donc (S_n) est strictement croissante.

b) Par l'absurde. On suppose que (S_n) est majorée, donc elle converge.

On pose $l = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et comme $S_{n+1} - S_n = U_{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = 0 \Rightarrow 2 = 0$ ce qui est absurde.

Par suite (S_n) n'est pas majorée.

c) c) D'après 8) a), on a (S_n) est strictement croissante et comme elle n'est pas majorée, on conclut qu'elle diverge vers $+\infty$.

Exercice N° 19 1) $U_0 \in \left]-1,0\right[$

a) Montrons, par récurrence, que $-1 < U_n < 0$. Pour n = 0, on a $-1 < U_0 < 0$, vrai à l'ordre 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $-1 < U_n < 0 \Rightarrow 0 < 1 + U_n < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{1+U_n} < 1 \Rightarrow$

$-1 < U_n\sqrt{1+U_n} < 0 \Rightarrow -1 < U_{n+1} < 0$. Conclusion : $-1 < U_n < 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

b) On a $U_{n+1} - U_n = U_n\left(\sqrt{1+U_n} - 1\right) = \frac{U_n^2}{\sqrt{1+U_n} + 1} > 0$ et donc U est croissante.

c) La suite U est croissante majorée par 0, donc elle est convergente vers un réel l.

Posons pour $x \in [-1,0]$, $f(x) = x\sqrt{x+1}$; f est continue sur [-1,0].

Comme $U_n \in \left]-1,0\right[\Rightarrow l \in [-1,0]$ et par suite f est continue en l. Donc l vérifie la relation

$f(l) = l \Leftrightarrow l = l\sqrt{1+l} \Leftrightarrow l = 0$.

2) a)Montrons d'abord que $U_n > 0$. On a $U_0 > 0$ et si on suppose que $U_n > 0$, on en déduit facilement que $U_{n+1} > 0$. Donc $U_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. On a $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \sqrt{1+U_n} > 1 \Rightarrow U$ est croissante.

b) $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \sqrt{1+U_n} \geq \sqrt{1+U_0}\ \forall n \in \mathbb{N}$

c) On a :

$\frac{U_1}{U_0} \geq \sqrt{1+U_0}$

$\frac{U_2}{U_1} \geq \sqrt{1+U_0}$

....

$\frac{U_n}{U_{n-1}} \geq \sqrt{1+U_0}$

En multipliant membre à membre ces inégalités puis en simplifiant, on obtient :

$\frac{U_n}{U_0} \geq \left(\sqrt{1+U_0}\right)^n \Rightarrow U_n \geq U_0\left(\sqrt{1+U_0}\right)^n$; or $\sqrt{1+U_0} > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_0\left(\sqrt{1+U_0}\right)^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq 1 + x \leq 1 + x + \frac{x^2}{4} = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x \leq x\sqrt{1+x} \leq x + \frac{x^2}{2}$

4) a) On pose $h_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $R_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$.

On a $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$. Donc, on a

$2^3 = 1^3 + 3\times1^2 + 3\times1 + 1$

$3^3 = 2^3 + 3\times2^2 + 2\times2 + 1$

....

$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$(n+1)^3 = 1 + 3R_n + 3h_n + 1 \Rightarrow R_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$

b) On a $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \leq f(x) \leq x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{k}{n^2} \leq f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{2n^4}$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \leq S_n \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \Rightarrow \frac{n+1}{2n} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2}$.

Exercice N° 20 : 1) f est continue strictement croissante sur $]-\infty,2]$ et comme $\frac{-1}{n}\in[-1,0[$, alors il existe un unique $a_n\in]-\infty,2]$ tel que $f(a_n)=\frac{-1}{n}$. f est continue strictement décroissante sur $[2,+\infty[$, $\frac{-1}{n}\in[-1,0[$, alors il existe un unique $b_n\in[2,+\infty[$ tel que $f(b_n)=-\frac{1}{n}$.

2) $-\frac{1}{n+1}\geq-\frac{1}{n}\Rightarrow f(a_{n+1})\geq f(a_n)$ et comme f est strictement croissante sur $]-\infty,2]$, alors $a_{n+1}\geq a_n\Rightarrow(a_n)$ est croissante.

De même $f(b_{n+1})\geq f(b_n)$ et f strictement décroissante sur C, alors $b_{n+1}\leq b_n$. Ainsi la suite (b_n) est décroissante.

3) On a $a_n\in]-\infty,2]\Rightarrow a_n\leq 2\Rightarrow(a_n)$ est croissante et majorée par 2 et donc elle converge vers un réel l. De même on voit que (b_n) est décroissante et minorée par 2 et donc elle converge vers un réel l'. Comme f est continue sur $[2,+\infty[\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}f(a_n)=f(l)=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=0$. Or l'équation f(x) = 0 admet 2 comme seule solution, d'où l = 2. De même on vérifie que $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=2$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0\Rightarrow$ les deux suites (a_n) *et* (b_n) sont adjacentes.

Exercice N° 21 :

1)a) $U_1=\frac{U_0+V_0}{2}=\frac{3}{2}$; $U_1=\sqrt{U_0V_0}=\sqrt{2}, U_2=\frac{U_1+V_1}{2}=\frac{\frac{3}{2}+\sqrt{U_0V_0}}{2}=\frac{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}{2}=\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$

$V_2=\sqrt{U_1V_1}=\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$

b) Pour $n=0$ on a $0\leq V_0=1\leq U_0=2$ (vrai) Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons que $0\leq V_n\leq U_n$ démontrons que $0\leq V_{n+1}\leq U_{n+1}$, On a $V_{n+1}=\sqrt{U_nV_n}\geq 0$ On a

$U^2_{n+1}-V^2_{n+1}=\frac{U^2_n+V^2_n+2U_nV_n}{4}-U_nV_n=\frac{U^2_n+V^2_n+2U_nV_n-4V_nU_n}{4}$

$=\frac{U^2_n+V^2_n-2V_nU_n}{4}=\frac{(U_n-V_n)^2}{4}\geq 0$ et $U_n\geq V_n\geq 0$ d'où $U_{n+1}\geq V_{n+1}$ D'après le principe de récurrence on a $\forall n\in\mathbb{N}$ on a $0\leq V_n\leq U_n$

c)*) $U_{n+1}-U_n=\frac{U_n+V_n}{2}-V_n=\frac{U_n-V_n}{2}\leq 0$ car $U_n\leq V_n$ d'où (U_n) est décroissante*)

$V_{n+1}-V_n=\sqrt{U_nV_n}-V_n=\sqrt{V_n}\left(\sqrt{U_n}-\sqrt{V_n}\right)\geq 0$ car $U_n\geq V_n\Rightarrow\sqrt{U_n}\geq\sqrt{V_n}$ d'où (V_n) est croissante

2)a)*) $V_n-\sqrt{U_nV_n}=\sqrt{V_n}\left(\sqrt{V_n}-\sqrt{U_n}\right)\leq 0$ donc $V_n\leq\sqrt{U_nV_n}$ *)

$U_{n+1}-V_{n+1}=\frac{U_n+V_n}{2}-\sqrt{U_nV_n}$ or $V_n\leq\sqrt{U_nV_n}$ d'où $-\sqrt{U_nV_n}\leq -V_n$ D'où

$U_{n+1}-V_{n+1}\leq\frac{U_n+V_n}{2}-V_n=\frac{U_n-V_n}{2}$ donc $U_{n+1}-V_{n+1}\leq\frac{1}{2}(U_n-V_n)$

b) Pour $n=0$ on a $U_0-V_0=2-1=1\leq\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$ vrai

Soit $n\in IN$ supposons que $U_n-V_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ démontrons que $U_{n+1}-V_{n+1}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

On a $U_{n+1}-V_{n+1}\leq\frac{1}{2}(U_n-V_n)\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ D'après le principe de récurrence on a $\forall n\in\mathbb{N}$ on a $U_n-V_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) $V_n\leq U_n$, V_n est croissante, U_n est décroissante, $0\leq U_n-V_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

donc $\lim\limits_{n\to\infty}U_n-V_n=0$. Donc (U_n) et (V_n) sont adjacentes et converge vers le même limite L

d) $V_n\leq U_n$, (V_n) est croissante, (U_n) est décroissante, (U_n) et (V_n) sont adjacentes $V_2\leq L\leq U_2$ or $V_2\simeq 1.4564$ et $U_2\simeq 1.4571$ donc $L\simeq 1.456$

Exercice N° 22 : 1) a) $U_{n+1}-U_n=\sum\limits_{k=0}^{2n+3}\frac{(-1)^k}{(2k)!}-\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{(2k)!}=\frac{1}{(4n+4)!}-\frac{1}{(4n+6)!}>0\Rightarrow U_{n+1}>U_n$ signifie U est croissante.

$V_{n+1}-V_n=U_{n+1}-U_n+\frac{1}{(4n+8)!}-\frac{1}{(4n+4)!}=\frac{1}{(4n+8)!}-\frac{1}{(4n+6)!}<0$ Ainsi V est décroissante.

b) $V_n-U_n=\frac{1}{(4n+4)!}\to 0$ lorsque $n\to+\infty$. On conclut donc que U et V sont adjacentes.

2) a) La suite U étant strictement croissante et converge vers l, alors elle est majorée par l.
Montrons que $U_n\neq l$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $U_{n_0}=l$, alors $U_m\geq U_{n_0}=l$ $\forall m\geq n_0$; or $U_n\leq l$ $\forall n\in IN\Rightarrow U_m=U_{n_0}=l$ $\forall$ $m\geq n_0$ ce qui contredit le fait que la suite U est strictement croissante. Donc $U_n<l$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
La suite V étant strictement décroissante et converge vers l, alors elle est minorée par l.
Montrons que $V_n\neq l$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $V_{n_0}=l\Rightarrow V_m\leq V_{n_0}=l$ et comme V est minorée par $l\Rightarrow V_m=V_{n_0}$ $\forall m\geq n_0$ ce qui contredit le fait que V est strictement décroissante.

b) Supposons que $l\in\mathbb{Q}\Rightarrow$ il existe $p\in\mathbb{Z}$ *et* $q\in\mathbb{N}^*$ tels que $l=\frac{p}{q}$

$U_q<l<V_q\Rightarrow U_q<\frac{p}{q}<U_q+\frac{1}{(4q+4)!}\Rightarrow U_q(4q+4)!<\frac{p}{q}(4q+4)!<(4q+4)!U_q+1$.

On pose $r=U_q(4q+4)!\Rightarrow r<\frac{p}{q}(4q+4)!<r+1$.

$r=\frac{p}{q}(4q+4)!=\left[1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+...+\frac{(-1)^{2q+1}}{4q+4}\right](4q+4)!\in\mathbb{Z}$.

c) D'autre part, on voit bien que $\frac{p}{q}(4q+4)!\in\mathbb{Z}$. Ainsi $\frac{p}{q}(4q+4)!$ est un entier strictement compris entre les deux entiers consécutifs r et r+1 ce qui est absurde. Donc l est irrationnel.

Exercice N° 23 1) a) $b_1=\frac{a_0+b_0}{2}=\frac{3}{2}, a_1b_1=2\Rightarrow a_1=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$; $\frac{a_1+b_1}{2}=b_2=\frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2}=\frac{17}{12}, a_2=\frac{24}{17}$

b) Démonstration par récurrence. Pour n = 0, on a $a_0=1$ *et* $b_0=2\Rightarrow b_0>a_0>0$, vrai pour n = 0. Soit $n\in IN$, supposons que $b_n>a_n>0$ et montrons que $b_{n+1}>a_{n+1}>0$.

On a $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}>0$ *et* $a_{n+1}=\frac{2}{b_{n+1}}>0$. $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{b_{n+1}}\left[\frac{(a_n+b_n)^2}{4}-a_nb_n\right]=\frac{1}{4b_{n+1}}(a_n-b_n)^2>0$.

Conclusion : $0<a_n<b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

2) a) On a $a_n<b_n\Rightarrow\frac{a_n+b_n}{2}<b_n\Rightarrow b_{n+1}<b_n$ et donc (b_n) est décroissante.

On a $b_{n+1}<b_n\Rightarrow\frac{2}{b_{n+1}}>\frac{2}{b_n}\Rightarrow a_{n+1}>a_n$ et donc (a_n) est croissante.

b) (a_n) est croissante et majorée par $b_0=1$, alors elle est convergente.
(b_n) est décroissante et minorée par 0, alors elle est convergente.

3) a) On a $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n-a_n)\left[\frac{1}{2b_{n+1}}(b_n-a_n)\right]$, or $2b_{n+1}=a_n+b_n>b_n-a_n$

$\Rightarrow 0<b_{n+1}-a_{n+1}\leq\frac{1}{2}(b_n-a_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Ainsi, on aura :

$0<b_1-a_1\leq\frac{1}{2}(b_0-a_0)$

$0<b_2-a_2\leq\frac{1}{2}(b_1-a_1)$

....

$0<b_n-a_n\leq\frac{1}{2}(b_{n-1}-a_{n-1})$

En multipliant ces inégalités et après simplification, on obtient : $0<b_n-a_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$ et donc (a_n) *et* (b_n) convergent vers une même limite l. Or $a_nb_n=2\Rightarrow l\times l=l^2=2\Rightarrow l=\sqrt{2}$ car $l>0$. Les deux suites (a_n) *et* (b_n) sont adjacentes.

4) a) $x_{n+1}-x_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{1-n}{2^{n+1}}<0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et donc (x_n) est décroissante et comme $x_n>0$ $\forall n\in IN^*$, alors (x_n) est convergente.

b) $x_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2^{n+1}}$; on pose $\alpha=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n.\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}\alpha+0\Rightarrow\alpha=0$

c) $y_n=n(b_n-a_n)\Rightarrow 0<y_n\leq\frac{n}{2^n}=x_n$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$.

Exercice N° 24 1) Pour n =0, on a : $F_0=1\geq 0$, $F_1=1$, $F_2=F_1+F_0=2\Rightarrow F_1\geq 1$ *et* $F_2\geq 2$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons que $F_n\geq n$ *et* $F_{n+1}\geq n+1$ et montrons que $F_{n+2}\geq n+2$.
On a $F_n\geq n$ *et* $F_{n+1}\geq n+1\Rightarrow F_{n+2}=F_n+F_{n+1}\geq 2n+1\geq n+2$.
Conclusion : $F_n\geq n$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}F_n=+\infty$.

2) Pour n = 0, $F_0\times F_2=F_0(F_0+F_1)=2$ *et* $F_1^2+(-1)^0=1+1=2\Rightarrow F_0\times F_2=F_1^2+(-1)^0$
Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $F_n\times F_{n+2}=F^2_{n+1}+(-1)^n$ et montrons que $F_{n+1}\times F_{n+3}=F^2_{n+2}+(-1)^{n+1}$.
On a $F_{n+1}\times F_{n+3}=F_{n+1}(F_{n+2}+F_{n+1})=F_{n+1}\times F_{n+2}+F^2_{n+1}=F_{n+1}\times F_{n+2}+F_n\times F_{n+2}-(-1)^n$
$\Rightarrow F_{n+1}\times F_{n+3}=F_{n+2}(F_n+F_{n+1})+(-1)^{n+1}=F^2_{n+2}+(-1)^{n+1}$.
Conclusion : $F_n\times F_{n+2}=F^2_{n+1}+(-1)^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

3) a) $\varphi_{n+1}-\varphi_n=\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}-\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{F_n\times F_{n+2}-F^2_{n+1}}{F_n\times F_{n+1}}=\frac{(-1)^n}{F_n\times F_{n+1}}$

$\varphi_{n+2}-\varphi_n=(\varphi_{n+2}-\varphi_{n+1})+(\varphi_{n+1}-\varphi_n)=\frac{(-1)^{n+1}}{F_{n+1}\times F_{n+2}}+\frac{(-1)^n}{F_n\times F_{n+1}}=\frac{(-1)^n}{F_{n+1}}\left(\frac{F_{n+2}-F_n}{F_n\times F_{n+2}}\right)=\frac{(-1)^n}{F_{n+1}}\frac{F_{n+1}}{F_n\times F_{n+2}}$

$=\frac{(-1)^n}{F_n\times F_{n+2}}$.

b) $U_{n+1}-U_n=\varphi_{2n+2}-\varphi_{2n}=\frac{(-1)^{2n}}{F_{2n}\times F_{2n+2}}=\frac{1}{F_{2n}\times F_{2n+2}}>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ et donc U est croissante.

$V_{n+1}-V_n=\frac{(-1)^{2n+1}}{F_{2n+1}\times F_{2n+3}}=-\frac{1}{F_{2n+1}\times F_{2n+3}}<0$ et donc V est décroissante.

c) $V_n-U_n=\varphi_{2n+1}-\varphi_{2n}=\frac{(-1)^{2n}}{F_{2n}\times F_{2n+1}}=\frac{1}{F_{2n}\times F_{2n+1}}>0$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n-U_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{F_{2n}\times F_{2n+1}}=0$. On conclut, donc, que U et V sont adjacentes. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=l\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_{2n+1}=l$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n=l$.

d) $\varphi_{n+1}=\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}=\frac{F_n+F_{n+1}}{F_{n+1}}=\frac{F_n}{F_{n+1}}+1=\frac{1}{\varphi_n}+1$. Par passage à la limite, on obtient :

$l=\frac{1}{l}+1 \Leftrightarrow l^2-l-1=0$ avec $l=\lim_{n\to+\infty}\varphi_n$

e) $l^2-l-1=0 \Rightarrow l=\frac{1+\sqrt5}{2}$ ou $l=\frac{1-\sqrt5}{2}$ et comme $l\ge 0 \Rightarrow l=\frac{1+\sqrt5}{2}$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\varphi_n=\frac{1+\sqrt5}{2}$.

Exercice N° 25 Il est clair que si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, alors elle converge.

Réciproquement, supposons que $\lim_{n\to+\infty}U_n=l\in\mathbb{R}$. Il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\ge p, |U_n-l|\le\frac{1}{3}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\ge p$, on a $|U_n-U_p|\le|U_n-l|+|l-U_p|\le\frac{2}{3}<1$.

Comme U_n et U_p sont dans $\mathbb{Z}$, alors $U_n=U_p$ par suite U est stationnaire.

Exercice N° 26 1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on considère l'équation $y=1+\frac{n}{y}\Leftrightarrow y^2-y-n=0$; la racine positive de cette équation est $y_n=\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\ge1$, on a

2) $\frac{n}{y_{n-1}}=\frac{2n}{1+\sqrt{4n-3}}$ et $\frac{n+1}{y_{n+1}}=\frac{2(n+1)}{1+\sqrt{4n+5}}$. $\frac{n}{y_{n-1}}-\frac{n+1}{y_{n+1}}=\frac{2n}{1+\sqrt{4n-3}}-\frac{2n+2}{1+\sqrt{4n+5}}$

$=\frac{2\left[\left(n\sqrt{5+4n}\right)^2-\left(1+(n+1)\sqrt{4n-3}\right)^2\right]}{\left(1+\sqrt{5+4n}\right)\left(1+\sqrt{4n-3}\right)\left(n\sqrt{4n+5}+1+(n+1)\sqrt{4n-3}\right)}\Rightarrow$ le signe de $\frac{n}{y_{n-1}}-\frac{n+1}{y_{n+1}}$ est celui de

$\left(n\sqrt{5+4n}\right)^2-\left(1+(n+1)\sqrt{4n-3}\right)^2=2\left((n+1)\left(1-\sqrt{4n-3}\right)\right)\le0\ \forall n\ge1$. Ainsi $\frac{n}{y_{n-1}}\le\frac{n+1}{y_{n+1}}\ \forall n\ge1$.

2) a) Soit (U_n) la suite des nombres réels définie par $U_1=1$ et $U_{n+1}=1+\frac{n}{U_n}\ \forall n\ge1$.

Pour n = 1, on a $y_1=\frac{1+\sqrt5}{2}, U_2=2$ et $y_2=2$ et donc on a : $y_1\le U_2\le y_2$. Soit $n\ge1$, supposons que $y_n\le U_{n+1}\le y_{n+1}$ et montrons que $y_{n+1}\le U_{n+2}\le y_{n+2}$. Comme

$y_n>0, y_{n+1}>0$ et $y_n\le U_n\le y_{n+1}\Rightarrow\frac{1}{y_{n+1}}\le\frac{1}{U_n}\le\frac{1}{y_n}$

$\Rightarrow\frac{n+1}{y_n}\le\frac{n+1}{U_{n+1}}\le\frac{n+1}{y_n}\Rightarrow y_{n+1}=1+\frac{n+1}{y_n}\le U_{n+2}=1+\frac{n+1}{U_{n+1}}\le1+\frac{n+1}{y_n}$. D'après 1) b), on a

$\frac{n+1}{y_n}\le\frac{n+2}{y_{n+1}}\Rightarrow y_{n+1}\le U_{n+2}\le1+\frac{n+2}{y_{n+1}}=y_{n+2}$. **Conclusion :** $y_n\le U_{n+1}\le y_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) On a : $\frac{y_{n+1}}{\sqrt n}=\frac{1+\sqrt{1+4n}}{\sqrt{4n}}\ge\frac{U_n}{\sqrt n}\ge\frac{y_{n-1}}{\sqrt n}=\frac{1+\sqrt{4n-3}}{\sqrt{4n}}\ \forall n\ge2$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\sqrt{1+4n}}{\sqrt{4n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\sqrt{4n-3}}{\sqrt{4n}}=1$, alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{U_n}{\sqrt n}=1$.

****

SOLUTION DES EXERCICES RELATIFS AU CHAPITRE

****

Exercise N° 1 1) b) ; 2) b) ; 3) i) c) ii) c) ; 4)a) ; 5)a)

Exercice N° 2 1) f (1) = 2 ; la courbe ζ_f présente une tangente horizontale au point d'abscisse 1 donc f '(1)= 0. De même f '(3) = 0.

2) f'(x) ≥ 0 si et seulement si f est croissante ; d'après le graphique : f est croissante sur $]-\infty,1]$ et $[3,+\infty[$ et est décroissante sur $[1,3]$. Donc $f'(x)\ge0\ \forall x\in]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$.

3) On a f(2) = 0 donc $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$. Or f'(2) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe ζ_f au point d'abscisse 2, $\Delta=(AB); A(0,6)$ et $B(2,0)$, $f'(2)=\frac{0-6}{2}=-3$.

4) f est croissante sur $]-\infty,1]$ donc $f'(x)\ge0\Rightarrow$ la courbe $\zeta_{f'}$ de f ' est située au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-\infty,1]$ et par suite A) et C) ne conviennent pas.

La courbe B) est la représentation graphique de la fonction f '.

Exercice N° 3 f dérivable en $\alpha\Rightarrow\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-0}{x-\alpha}=f'(\alpha)$.

g est dérivable en $\alpha\Rightarrow g'(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{g(x)}{x-\alpha}$ .donc $\frac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)}=\frac{\lim_{x\to\alpha}\frac{g(x)}{x-\alpha}}{\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{x-\alpha}}=\lim_{x\to\alpha}\frac{g(x)}{f(x)}$ (*).

On pose f(x)= x – 1 et g(x) = $\sin\pi x$, f (1) = g (1) et f'(0) = 1 $\ne0$. $\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\frac{g'(1)}{f'(1)}=\frac{\pi\cos\pi}{1}=-\pi$. De même

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tgx-1}{2\cos x-\sqrt2}=\frac{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2}{-\sqrt2}=-\sqrt2$

Exercice N° 4 $f(x)=x-\sin x$, f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x)=1-\cos x\ge0\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi f est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ $f(x)\ge f(0)=0\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\sin x\le x\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (1).

$g(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$, g est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $g'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$

$g''(x)=-\sin x+x\ge0\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Donc g' est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow g'(x)\ge g'(0)=0\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Alors g est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow g(x)\ge g(0)=0\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow x-\frac{x^3}{6}\le\sin x, \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (2). (1) et (2) donnent :

$x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (3).

b) $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$, on a : $-x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et d'après (3) :

$-x-\frac{(-x)^3}{6}\le\sin(-x)\le-x\Rightarrow-x+\frac{x^3}{6}\le-\sin x\le-x\Rightarrow x\le\sin x\le x-\frac{x^3}{6}$ (4)

De (3) et (4), on a : $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]:|\sin x-x|\le\frac{|x^3|}{6}$ et par suite $\left|\frac{\sin x-x}{x}\right|\le\frac{x^2}{6}\ \forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$.

2) On a $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{6}=0\Rightarrow\lim_{x\to0}(\frac{\sin x}{x}-1)=0\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$; $\lim_{h\to0}h(x)=1=h(0)\Rightarrow h$ est continue en 0.

On a $\left|\frac{\sin x-x}{x}\right|\le\frac{x^2}{6}\ \forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}\Rightarrow\left|\frac{\sin x-x}{x^2}\right|\le\frac{|x|}{6}$.

Or $\lim_{x\to0}\frac{|x|}{6}=0\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2}=0$ et par suite h est dérivable en 0 et h'(0) = 0.

Exercice N° 5 1) a) $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\sqrt{\frac{x}{x+2}}}{x}=\lim_{x\to0^+}-\frac{1}{x}.\frac{\sqrt x}{\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{\sqrt x\sqrt{x+2}}=-\infty$. Donc f n'est pas dérivable à droite en 0 ; (ζ_f) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à droite verticale dirigée vers le bas.

b) Soit a et b deus réels positifs tel que a < b

$f(a)-f(b)=\sqrt{\frac{b}{b+2}}-\sqrt{\frac{a}{a+2}}=\frac{\frac{b}{b+2}-\frac{a}{a+2}}{\sqrt{\frac{b}{b+2}}+\sqrt{\frac{a}{a+2}}}=\frac{ab+2b-ab-2a}{(a+2)(b+2)\left(\sqrt{\frac{b}{b+2}}+\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right)}$

$=\frac{2(b-a)}{(a+2)(b+2)\left(\sqrt{\frac{b}{b+2}}+\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right)}>0$ or $0\le a<b$ donc $f(a)-f(b)>0$ d'où $f(a)>f(b)$ ainsi f est strictement décroissante sur IR_+.

c) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}1-\sqrt{\frac{x}{x+2}}=\lim_{x\to+\infty}1-\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}}=0$ donc la droite d'équation y = 0 est une asymptote horizontale à (ζ_f) au voisinage de $(+\infty)$.

2) a Soit a et b deux réels de $[0;1[$ tel que $a<b\Rightarrow0<\frac{\pi}{2}a<\frac{\pi}{2}b<\frac{\pi}{2}$ donc $g(a)<g(b)$ d'ou' f est strictement croissante sur $[0;1[$

b) $\lim_{x\to1^-}g(x)=\lim_{x\to1^-}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=+\infty$

3) a) Soit $x\in[0;1[$; $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$. On a :

f et g sont continues sur $[0;1[$ donc $(f-g)$ est continue sur $[0;1[$ et en particulier sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

$(f-g)(0)=1$ et $(f-g)\left(\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{\frac{1}{5}}$ on a $(f-g)(0)\times(f-g)\left(\frac{1}{2}\right)<0$;

f est strictement décroissante sur $[0;1[$ et $(-g)$ est strictement décroissante sur $[0;1[$ donc $(f-g)$ est strictement décroissante sur $[0;1[$ ainsi l'équation $f(x)=g(x)$ admet une unique solution α dans $\left]0;\frac{1}{2}\right[$.

b) $0.3<\alpha<0.4$.

4) g est continue sur $[0;1[$ et pour tout $x\in[0;1[$; $g(x)\ge0$ donc $g(x)\in[0;+\infty[$ de plus f est continue sur $[0;+\infty[$ donc $f\circ g=h$ est continue sur $[0;1[$.

$\lim_{x\to1^-}g(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ donc $\lim_{x\to1^-}h(x)=\lim_{x\to1^-}f\circ g(x)=0=h(1)$ d'où h est continue à gauche en 1 et par suite h est continue sur $[0;1]$.

Exercice N° 6 1) $f(x)=\sqrt{3x+4}$, f est dérivable sur $\left]\frac{-4}{3},+\infty\right[$ et $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$. Ainsi l'approximation de f pour h proche de h est $f(h)\simeq f(0)+h\,f'(0)\Leftrightarrow f(h)\simeq2+\frac{3}{4}h$.

2) $\sqrt{4.000048}=\sqrt{4+3\times0.000016}\simeq2+\frac{3}{4}\times0.000016=2.000012$.

Pour $\sqrt{4.000048}$, la calculatrice affiche 2.00001199, l'approximation affine de $\sqrt{4.000048}$ est une valeur approchée par excès de $\sqrt{4.000048}$.

Exercice N° 7 : 1) f dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$ et $f'(x)=\frac{-2}{(x+5)^2}$; $f(-1+t)\simeq f(-1)+f'(-1)t=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}t$: c'est l'approximation affine de f au voisinage de (-1).

2) $f(-1+t)=\frac{2}{-1+t+5}=\frac{2}{t+4}$; $f(-1)+f'(-1)t=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}t$. L'erreur commise est $f(-1+t)-f(-1)-f'(-1)t=\frac{2}{t+4}+\frac{1}{8}t-\frac{1}{2}$

Exercice N° 8 $f(x)=\frac{1}{x^3}$, soit $p\in\mathbb{N}^*$, f est définie continue sur [p, p+1], f est dérivable sur

$]p, p+1[$. $\forall x\in]p,p+1[$, $f'(x)=\frac{-3}{x^4}$, D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c de

$]p, p+1[$ tel que $f(p+1)-f(p) = (p+1-p)f'(c)= f'(c) \Rightarrow \frac{1}{(p+1)^3}-\frac{1}{p^3}=\frac{-3}{c^4} \Leftrightarrow \frac{1}{p^3}-\frac{1}{(p+1)^3}=\frac{3}{c^4}$.

2) On a $p<c<p+1 \Rightarrow \frac{1}{p+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{p} \Rightarrow \frac{3}{(p+1)^4}<\frac{3}{c^4}<\frac{3}{p^4} \Rightarrow \frac{3}{(p+1)^4}\le\frac{1}{p^3}-\frac{1}{(p+1)^3}\le\frac{3}{p^4}$.

Exercice N°9 1) $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ $\forall x\in[0,1]$; f est dérivable sur $[0,1]$ et on a

$f'(x)=\frac{\pi}{3}\left(1+\tan^2\frac{\pi}{3}x\right)=\frac{\pi}{3\cos^2\frac{\pi}{3}x}$.

$0\le x\le 1 \Rightarrow 0\le\frac{\pi}{3}x\le\frac{\pi}{3}$ et comme $x\mapsto\cos x$ est décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$, alors

$\frac{1}{2}\le\cos\frac{\pi}{3}x\le 1 \Rightarrow \frac{1}{4}\le\cos^2\frac{\pi}{3}x\le 1 \Rightarrow \frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{3\cos^2\frac{\pi}{3}x}\le\frac{4\pi}{3}$. Ainsi $\forall x\in[0,1]$, $\frac{\pi}{3}\le f'(x)\le\frac{4\pi}{3}$.

2) $h\in[0,1]\Rightarrow[0,h]\subset[0,1]$, f est définie, continue et dérivable sur $[0,h]$ et $\forall x\in[0,h]$, on a

$\frac{\pi}{3}\le f'(x)\le\frac{4\pi}{3}$. Pour $h\neq 0$ et d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$\frac{\pi}{3}\le\frac{f(h)-f(0)}{h-0}\le\frac{4\pi}{3}\Rightarrow\frac{\pi}{3}h\le\tan\left(\frac{\pi}{3}h\right)\le\frac{4}{3}\pi h$, et si h = 0, on a $\tan\left(\frac{\pi}{3}\times 0\right)=0$ et l'inégalité reste vraie.

Ainsi $\forall h\in[0,1]$, on a $\frac{\pi}{3}h\le\tan\left(\frac{\pi}{3}h\right)\le\frac{4}{3}\pi h$.

Exercice N°10 1) a) $g'(x)=3x^2-1>0$ $\forall x\in[1;+\infty[$

$g(1)=1^3-1-1=-1$ $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3-x-1=+\infty$.

x	1		α		+∞
g'(x)		+			
g(x)	-1	↗	0	↗	+∞

b) g est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ donc $g([1;+\infty[)=[-1;+\infty[$; $0\in[-1;+\infty[$ donc il existe un seul $\alpha\in[1;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$. On a : $g(1.3)=-0.103<0$ et $g(1.4)=0.344>0$; $g(1.3)\times g(1.4)<0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $1.3<\alpha<1.4$.

c) On a α est une solution de $g(x)=0 \Leftrightarrow g(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha^3-\alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha^3=\alpha+1 \Leftrightarrow \alpha.\alpha^2=\alpha+1$

$\Leftrightarrow \alpha^2=\frac{\alpha+1}{\alpha} \Rightarrow \alpha=\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$.

2)a) $x\mapsto\frac{x+1}{x}$ est dérivable et strictement positive sur $[1;+\infty[$ donc $x\mapsto\sqrt{\frac{x+1}{x}}$ est dérivable sur $[1;+\infty[$ d'où f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et on a : $\forall x\in[1;+\infty[$ $f'(x)=-\frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

b) Montrons que $\forall x\in[1;+\infty[\,;-\frac{1}{2}\le f'(x)\le 0$.

On a $f'(x)=-\frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\le 0$; Montrons que $\forall x\in[1;+\infty[\,;f'(x)\ge-\frac{1}{2}$; montrons que $\forall x\in[1;+\infty[\,;f'(x)\le\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\le 1$.

$\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x+1}}=\sqrt{\frac{x}{x^2(x+1)}}=\sqrt{\frac{1}{x^3(x+1)}}$. On a $x\ge 1 \Leftrightarrow x+1\ge 2$ et $x^3\ge 1$ donc $x^3(x+1)\ge 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3(x+1)}\le\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{x^3(x+1)}}\le\sqrt{\frac{1}{2}}\le 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\ge-\frac{1}{2}$ donc $\forall x\in[1;+\infty[\,;-\frac{1}{2}\le f'(x)\le 0$

c) On a : $\Rightarrow -\frac{1}{2}x+\frac{\alpha}{2}\le f(x)-\alpha\le 0 \; -\frac{1}{2}\le f'(x)\le 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}(x-\alpha)\le f(x)-f(\alpha)\le 0(x-\alpha)$ (TAF)

or $f(\alpha)=\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}}=\alpha \Rightarrow -\frac{1}{2}x+\frac{\alpha}{2}+\alpha\le f(x)\le\alpha \Rightarrow -\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\alpha\le f(x)\le\alpha$.

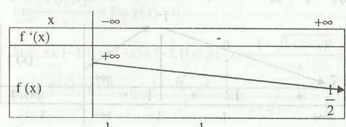
Exercice N° 11 : 1) a) $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-1$, g définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=\frac{3}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}>0$.

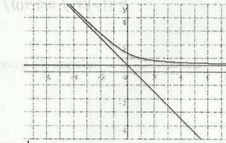
x	−∞		+∞
g '(x)		+	
g (x)	-2	↗	0

b) $\forall x\in\mathbb{R}$, on a $(-x)\in\mathbb{R}$ et $g(x)+g(-x)=\frac{-x}{\sqrt{x^2+3}}-1+\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-1=-2$

$\Rightarrow$ I(0, -1) est un centre de symétrie de ζ_g.

2)a) $f'(x)=\frac{1}{2}g(x)$ or $g(x)\in]-2,0[$ $\forall x\in\mathbb{R}$, alors $f'(x)<0$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.





b) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$, alors $\Delta: y=\frac{1}{2}$ est une asymptote à ζ_f au voisinage de $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ et $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]=\frac{1}{2}$, et $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+\frac{1}{2})\right]=0$ donc $\Delta': y=-x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à ζ_f au voisinage de $-\infty$.

3) a) $U_0=0\ge 0$. Supposons que $U_n\ge 0$ et montrons que $U_{n+1}\ge 0$.

On a $U_{n+1}=f(U_n)\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\Rightarrow U_{n+1}\ge 0$. **Conclusion** : $U_n\ge 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

b) $\forall x\ge 0$, $f'(x)=\frac{1}{2}g(x)$; or si $x\ge 0\Rightarrow -1\le g(x)\le 0\Rightarrow\frac{-1}{2}\le\frac{1}{2}g(x)\le 0\Rightarrow|f'(x)|\le\frac{1}{2}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a $|f(a)-f(b)|\le\frac{1}{2}|a-b|$ $\forall(a,b)\in\mathbb{R}_+^2$.

c) On a : $U_n\ge 0$ et $1\ge 0\Rightarrow|f(U_n)-f(1)|\le\frac{1}{2}|U_n-1|\Rightarrow|U_{n+1}-1|\le\frac{1}{2}|U_n-1|$; $|U_0-1|=1\le\left(\frac{1}{2}\right)^0$, vraie.

Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $|U_n-1|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et montrons que $|U_{n+1}-1|\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

$|U_{n+1}-1|\le\frac{1}{2}|U_n-1|\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Rightarrow|U_n-1|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$;

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}(U_n-1)=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}U_n=1$.

Exercice N° 12 1) $\lim_{0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=1$, $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos(\pi x)=\cos 0=1$ Or f(0) = 1alors f est continue en 0. $\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\cos(\pi x)=\cos(-\pi)=-1$, $\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)}\sqrt{-x-1}-1=-1$

Or f(-1) = -1,alors f est continue en -1.

2) $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=1\Rightarrow f'_d(0)=1$.

$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos(\pi x)-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos(\pi x)-1}{\pi x}\times\pi=0\times\pi=0\Rightarrow f'_g(0)=0$. $f'_d(0)\neq f'_g(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0. $\lim_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\cos(\pi x)-\cos(-\pi)}{x+1}=u'(-1)$ avec

$u(x)=\cos(\pi x)\Rightarrow u'(x)=-\pi\sin(\pi x)\Rightarrow f'_d(-1)=0$.

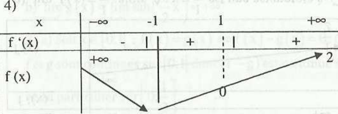
$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\sqrt{-x-1}}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{-1}{\sqrt{-x-1}}=-\infty$, donc f n'est pas dérivable en (-1).

3) $x\in]0,+\infty[$, $f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{(1+x^2)}=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}>0$.

$x\in]-1,0[$, $f(x)=\cos(\pi x)$

$\Rightarrow f'(x)=-\pi\sin(\pi x)>0$ car $-\pi<\pi x<0$. $x\in]-\infty,-1[$, $f(x)=\sqrt{-x-1}-1\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{-x-1}}<0$.

4)



5) f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[\Rightarrow f([0,+\infty[)=[f(0),\lim_{x\to+\infty}f(x)[=[1,2[$.

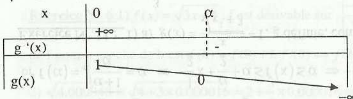
Donc $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $1\le f(x)<2$.

6) a) $S_n=\frac{1}{n^2+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{n^2+1}\sum_{k=0}^{n}(f(k)-1)$; or $\forall k\in\{0,1,2,...,n\}$, $k\ge 0\Rightarrow 1\le f(k)\le 2$

$\Rightarrow 0\le f(k)-1\le 1\Rightarrow 0\le\sum_{k=0}^{n}(f(k)-1)\le n+1\Rightarrow 0\le\frac{1}{n^2+1}\sum_{k=0}^{n}(f(k)-1)\le\frac{n+1}{n^2+1}\Rightarrow 0\le S_n\le\frac{n+1}{n^2+1}$.

b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}S_n=0$.

7) a) $g(x)=f(x)-x$, $g'(x)=f'(x)-1=\frac{1}{\sqrt{1+x^2(1+x^2)}}-1\le 0$. $g(0)=f(0)-0=1$, $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\infty$



b) g est continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $g([0,+\infty[)=]-\infty,1]$. Comme $0\in g([0,+\infty[)$, alors l'équation g(x)= 0 admet une seule solution α dans $\mathbb{R}_+$ et par suite l'équation f(x) = x admet α comme seule solution dans $\mathbb{R}_+$. $g(1)=f(1)-1=\frac{1}{\sqrt{2}}>0$, $g(2)=f(2)-2=\frac{2}{\sqrt{5}}-1<0$, et comme g est continue sur [1,2], donc $\alpha\in]1,2[$.

x	0		α		+∞
g (x)		+	0	-	

8)a) On a $U_0=1\Rightarrow 1\le U_0\le\alpha$. Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $1\le U_n\le\alpha$ et montrons que $1\le U_{n+1}\le\alpha$. On a f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors $f(1)\le f(U_n)\le f(\alpha)\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\le U_{n+1}\le\alpha$

(car $f(\alpha)=\alpha$) et donc $0\le U_{n+1}\le\alpha$.

Conclusion : $1\le U_n\le\alpha\ \forall n\in\mathbb{N}$.

b) $U_n\le\alpha\Rightarrow g(U_n)\ge 0\Rightarrow f(U_n)\ge U_n$ et par suite $U_{n+1}\ge U_n$.

U est croissante majorée par α, donc elle est convergente.

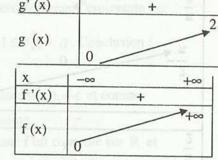
$U_{n+1}=f(U_n)$, f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et en particulier en $l=\lim\limits_{n\to+\infty}U_n\Rightarrow f(l)=l\Rightarrow l=\alpha$.

Exercice N° 13 A)1) g dérivable

sur $\mathbb{R}$ *et* $g'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}+1=0$. g admet 0 comme minimum

absolu sur $\mathbb{R}\Rightarrow g(x)\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.



x	$-\infty$	$+\infty$
g' (x)	+	
g (x)	0 ↗	2

x	$-\infty$	$+\infty$
f '(x)	+	
f (x)	0 ↗	$+\infty$

2) $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1=g(x)\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$

puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=+\infty$

3)a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0\Rightarrow\Delta: y=2x$ est une asymptote

oblique à ζ_f au voisinage de $+\infty$.

$f(x)-2x=\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ et par suite la

courbe ζ_f est située au-dessus de Δ. b) voir figure

B) 1) f continue sur [x, x+1], f est dérivable sur]x, x+1[

$\forall x\in\mathbb{R}$. $g(x)\le f'(x)\le g(x+1)$, donc d'après

le théorème des accroissements

finis : $(x+1-x)g(x)\le f(x+1)-f(x)\le(x+1-x)g(x+1)\Rightarrow g(x)\le f(x+1)-f(x)\le g(x+1)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2) a) $U_0=\dfrac{1}{0+1}\sum\limits_{k=0}^{0}g(k)=1$, $U_1=\dfrac{1}{1+1}\sum\limits_{k=0}^{1}g(k)=\dfrac{1}{2}[g(0)+g(1)]=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt2}+1\right)=1+\dfrac{1}{2\sqrt2}$

b) Soit $k\in\mathbb{N}\Rightarrow g(k)\le f(k+1)-f(k)\le g(k+1)$

$g(0)\le f(1)-f(0)$

$g(1)\le f(2)-f(1)$

....

$g(n)\le f(n+1)-f(n)$

Si on somme membre à membre ces inégalités et après simplification, on obtient : $U_n\le\dfrac{f(n+1)-1}{n+1}$ (*).

D'autre part, on a :

$f(1)-f(0)\le g(1)$

$f(2)-f(1)\le g(2)$

....

$f(n)-f(n-1)\le g(n)$

On somme membre à membre ces inégalités et après simplification, on obtient : $\dfrac{f(n)}{n+1}\le U_n$ (**). D'après (*) et (**), on aura : $\dfrac{f(n)}{n+1}\le U_n\le\dfrac{f(n+1)-1}{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(n)}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}+\dfrac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}n\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}+\dfrac{n}{n+1}=2$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(n+1)}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{n+1}+\dfrac{n+1}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{(n+1)^2}}}{n+1}+1-\dfrac{1}{n+1}=2$. Donc d'après le théorème des comparaisons $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=2$.

3) $V_n=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}(g(k)-1)=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}g(k)-\dfrac{n+1}{n+1}=U_n-1\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=1$.

Exercice N° 14 : A)1) $D=\left\{x\in\mathbb{R}, 1+x\ge0, 1-x\ge0\ et\ \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\ne0\right\}=[-1,1]$

2) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $g(x)=\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^2}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}=\dfrac{2-2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}{2x}=\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$.

3) Si $x\in[-1,1]\Rightarrow(-x)\in[-1,1]$ *et* $g(-x)=\dfrac{1-\sqrt{1-(-x)^2}}{-x}=-g(x)$. Donc g est impaire.

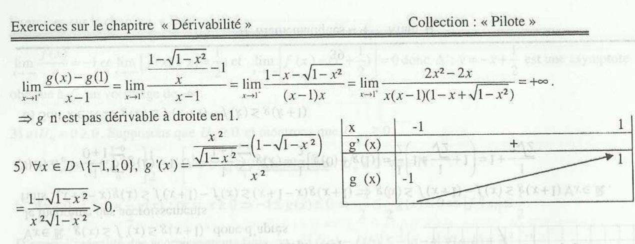
4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow g'(0)=\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-x-\sqrt{1-x^2}}{(x-1)x}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x^2-2x}{x(x-1)(1-x+\sqrt{1-x^2})}=+\infty$.

$\Rightarrow g$ n'est pas dérivable à droite en 1.

5) $\forall x\in D\setminus\{-1,1,0\}$, $g'(x)=\dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}-\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}$

$=\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}>0$.



x	-1	1
g' (x)	+	
g (x)	-1 ↗	1

B) 1) $f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *si* $x\in\mathbb{R}\setminus[0,1]$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=g(0)=0$. $\forall x\in\mathbb{R}^*, -x^2\le x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\le x^2$ et

comme $\lim\limits_{0^-}(-x^2)=\lim\limits_{0^-}x^2=0$, alors $\lim\limits_{0^-}f(x)=0=$ f(0) $\Rightarrow$ f est continue en 0.

2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=\dfrac{1}{2}=f'_d(0)$ $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=0\Rightarrow f'_g(0)=0$.

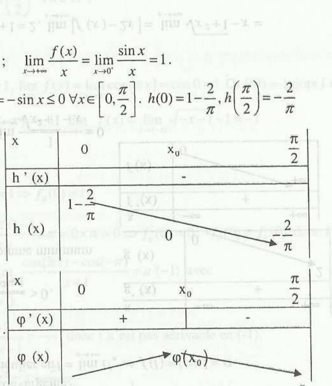
Et puisque $f'_g(0)\ne f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

3) $\forall x\in\mathbb{R}_[0,1]$, $f'(x)=2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}\sin x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\dfrac{\sin x}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

C) $U_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k\sin\left(\dfrac{1}{k}\right)$ a) $h(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi}$, $h'(x)=-\sin x\le0\ \forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. $h(0)=1-\dfrac{2}{\pi}$, $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{2}{\pi}$;

h est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et comme h est strictement décroissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc il existe $x_0\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ unique tel que $h(x_0)=0$.



x	0	x_0	$\dfrac{\pi}{2}$
h ' (x)		-	
h (x)	$1-\dfrac{2}{\pi}$ ↘	0 ↘	$-\dfrac{2}{\pi}$

x	0	x_0	$\dfrac{\pi}{2}$
φ ' (x)	+	-	
φ (x)	0 ↗	φ(x_0) ↘	0

b) $\varphi(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x\Rightarrow\varphi'(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi}=h(x)$.

$\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\varphi(x)\ge0\Rightarrow\dfrac{2}{\pi}x\le\sin x$.

c) $\forall k\in\{1,2,...,n\}$, $\dfrac{1}{k}\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{k}\le\sin\left(\dfrac{1}{k}\right)\Rightarrow$

$\dfrac{2}{\pi}\le k\sin\left(\dfrac{1}{k}\right)\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2}{\pi}\le\sum\limits_{k=1}^{n}k\sin\left(\dfrac{1}{k}\right)\Rightarrow\dfrac{2n}{\pi}\le U_n$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n}{\pi}=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty$.

Exercice N° 15 1) a) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}1+\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}=f(0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)=1\Rightarrow f$ est continue en 0.

b) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2+2x}{x(x+1)\sqrt{x^2+2x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-1}{(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}}=-\dfrac{1}{0^-}=+\infty.\Rightarrow\zeta_f$ a une tangente verticale au point A(0,1).

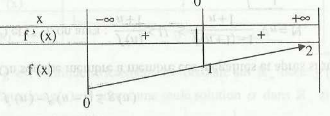
c) i) $x\to\dfrac{x}{x-2}$ dérivable sur $]-\infty,0[$ *et* $\forall x\in]-\infty,0[$, $\dfrac{x}{x-2}>0\Rightarrow x\mapsto\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$ est dérivable sur $]-\infty,0[$ et par suite f est dérivable sur $]-\infty,0[$.

$x\mapsto x^2+2x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ *et* $\forall x\in]0,+\infty[$, $x^2+2x>0\Rightarrow x\mapsto\sqrt{x^2+2x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

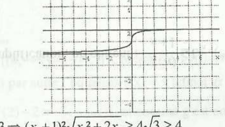
D'autre part $x\mapsto x+1$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ *et* $x+1\ne0\Rightarrow$ f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

ii) $f'(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}}\ \forall x\in]-\infty,0[$ *et* $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x}}\ \forall x\in]0,+\infty[$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1-1=0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=1+1=2$.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
f ' (x)	+		+
f (x)	0 ↗	1 ↗	2



2) 2)a) $\forall x\in[1,+\infty[$, $(x+1)^2\ge2^2=4$ *et* $x^2+2x\ge1+2=3\Rightarrow(x+1)^2\sqrt{x^2+2x}\ge4\sqrt3\ge4$

$\Rightarrow0\le f'(x)\le\dfrac{1}{4}\ \forall x\in[1,+\infty[$

b) Soit g(x) = f(x) – x, $g'(x)=f'(x)-1\Rightarrow-1\le g'(x)\le-\dfrac{3}{4}\ \forall x\in[1,+\infty[$.

Ainsi g est continue strictement décroissante sur $[1,+\infty[\Rightarrow g([1,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}g(x),g(1)\right]=]-\infty,g(1)]$.

Comme $0\in]-\infty,g(1)]$, alors il existe un unique $\alpha\in[1,+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0\Leftrightarrow$ l'équation f(x) = x admet

une unique solution α dans l'intervalle $[1,+\infty[$. On a $g(1)=f(1)-1=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$ et $g(2)=\frac{2\sqrt{2}}{3}-1<0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\alpha\in\,]1,2[$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \Rightarrow \zeta_f$ admet la droite y = 0 comme asymptote au voisinage de $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Rightarrow \zeta_f$ admet la droite y = 2 comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

II) 1)a) Pour $n=0$, on a $U_0=1\Rightarrow 1\le U_0<\alpha$, vrai pour n = 0.

Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $1\le U_n<\alpha$ et montrons que $1\le U_{n+1}<\alpha$.

On a, d'après l'hypothèse de récurrence $1\le U_n<\alpha$ et comme f est strictement croissante sur $[1,+\infty[\Rightarrow f(1)\le f(U_n)<f(\alpha)\Rightarrow 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\le U_{n+1}<\alpha$ et par suite $1\le U_{n+1}<\alpha$. Conclusion : $1\le U_n<\alpha\ \forall n\in\mathbb{N}$.

b) $U_{n+1}-U_n=f(U_n)-U_n=g(U_n)$, g étant strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ et comme $U_n<\alpha\Rightarrow g(\alpha)\le g(U_n)\Rightarrow U_{n+1}-U_n>0$ et par suite U est croissante.

c) U croissante et majorée par α, donc elle est convergente. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et $U_n\in[1,\alpha]$, donc $l=\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=f(l)\Rightarrow l=\alpha$.

2) a) f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $|f'(x)|<\frac{1}{4}\ \forall x\in[1,+\infty[\Rightarrow|f(b)-f(a)|\le\frac{1}{4}|a-b|$ pour tous réels a et b de l'intervalle $[1,+\infty[$. Si on prend $a=\alpha$ et $b=U_n$, puisque $\forall n\in\mathbb{N}, U_n\in[1,+\infty[$, on aura :

$|f(U_n)-f(\alpha)|\le\frac{1}{4}|U_n-\alpha|\Leftrightarrow|U_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{4}|U_n-\alpha|$ et comme $U_n<\alpha\ \forall n\in\mathbb{N}$, alors : $0<\alpha-U_{n+1}\le\frac{1}{4}(\alpha-U_n)$.

b) Pour n = 0, on a : $U_0=1, 0<\alpha-U_0\le\left(\frac{1}{4}\right)^0\alpha$, vrai pour n = 0. Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $0<\alpha-U_n\le\alpha\left(\frac{1}{4}\right)^n$ et montrons que $0<\alpha-U_{n+1}\le\alpha\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$. On a, d'après 2)a), $0<\alpha-U_{n+1}\le\frac{1}{4}(\alpha-U_n)$,

or on a $0<\alpha-U_n\le\alpha\left(\frac{1}{4}\right)^n$, alors : $0<\frac{1}{4}(\alpha-U_n)\le\alpha\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ et par suite $0<\alpha-U_{n+1}\le\alpha\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ Par le principe de récurrence, on a : $0<\alpha-U_n\le\alpha\left(\frac{1}{4}\right)^n\ \forall n\in\mathbb{N}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha\left(\frac{1}{4}\right)^n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\alpha$.

3) a) On a, d'après 2)b), $0<\alpha-U_k\le\alpha\left(\frac{1}{4}\right)^k\ \forall k\in\mathbb{N}\Rightarrow 0<\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha-U_k)\le\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha\left(\frac{1}{4}\right)^k$

$$\Rightarrow 0<n\alpha-S_n\le\frac{\alpha}{4}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\alpha}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]\Rightarrow n\alpha-\frac{\alpha}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]\le S_n<n\alpha.$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha-\frac{\alpha}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]=+\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$.

c) $\alpha-\frac{\alpha}{3n}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]\le T_n<\alpha$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha-\frac{\alpha}{3n}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]=\alpha\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\alpha$.

Exercice N° 16 g est continue en $\frac{1}{3}\Leftrightarrow f(1)=f(0)$ et dans ce cas $g'_g\left(\frac{1}{3}\right)=3f'(1)$ et $g'_d\left(\frac{1}{3}\right)=3f'(0)$.

Par suite g est dérivable si et seulement si f (0) = f (1) et f '(0) = f '(1).

Exercice N°17 1) $f(x)=(1+x)^n$, $f'(x)=n(1+x)^{n-1}$, $f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}$

2) $f(x)=(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx^k=1+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$

$\Rightarrow f'(x)=C_n^1+2C_n^2x+...+(n-1)C_n^{n-1}x^{n-2}+nC_n^nx^{n-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n^kx^{k-1}$

$\Rightarrow f''(x)=2C_n^2+...+(n-1)(n-2)C_n^{n-1}x^{n-3}+n(n-1)C_n^nx^{n-2}=\sum\limits_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^kx^{k-2}$.

3) $(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx^k\Rightarrow n(1+x)^{n-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n^kx^{k-1}$ et $n(n-1)(1+x)^{n-2}=\sum\limits_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^kx^{k-2}$.

Si on remplace x par 1, on obtient : $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$, $n2^{n-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n^k$ et $n(n-1)2^{n-2}=\sum\limits_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^k$

$\sum\limits_{k=1}^{n}k(k-1)C_n^k=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2C_n^k-\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n^k\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}k^2C_n^k=\sum\limits_{k=1}^{n}k(k-1)C_n^k+\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n^k=n2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}$

Exercice N° 18 Supposons que f est T- périodique (avec T > 0), alors f (T) = f (0). Comme f est continue sur [0,T], dérivable sur]0,T[et f(T) = f(0), alors d'après le théorème de Rolle il existe au moins un réel c de]0,T[tel que f '(c) = 0 ce qui est impossible donc notre supposition est fausse et par suite f ne peut pas être périodique.

SOLUTION DES EXERCICES RELATIFS AU CHAPITRE

Exercice N° 1 : A) 1) a), c), d) ; 2) a), c) B) $C_{f^{-1}}=S_\Delta(C_f)$ avec $\Delta: y=x$ compléter la construction de $C_{f^{-1}}$.

Exercice N° 2 : 1) Vrai , 2) Vrai ; 3) Vrai ; 4) Vrai ; 5) Vrai

Exercice3 : 1) ζ_f admet en B(1 ;2) une demi tangente à droite verticale dirigée vers le haut alors, $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$. ζ_f admet en B(1 ;2) une demi tangente à gauche portée par une droite de cœfficient directeur (-2) alors, $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-2$.

2) ζ_f admet en A(-1 ;2) une tangente de cœfficient directeur 2 alors, $f'(-1)=2$.

$1^{ère}$ méthode : Soit $x\in\mathbb{R}^*$,

$$\frac{f(x^2-1)-2}{x}=\frac{f(x^2-1)-2}{(x^2-1)+1}\times\frac{(x^2-1)+1}{x}=\frac{f(x^2-1)-2}{(x^2-1)+1}\times x.$$

On pose $X=x^2-1$ donc si $x\to0\Rightarrow X\to-1$ et par suite :

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x^2-1)-2}{(x^2-1)+1}=\lim\limits_{X\to-1}\frac{f(X)-2}{X+1}=\lim\limits_{X\to-1}\frac{f(X)-f(-1)}{X+1}=f'(-1)=2$ et

comme $\lim\limits_{x\to0}x=0$, il en résulte $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2-1)-2}{x}=2\times0=0$.

$2^{ère}$ méthode : Soit $x\in\mathbb{R}^*$, $\frac{f(x^2-1)-2}{x}=\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$

avec $\varphi: x\mapsto f(x^2-1)$. On a :

[1] $\varphi=f\circ u$ avec $u: x\mapsto x^2-1$. [2] u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $u'(x)=2x$ donc u est dérivable en 0 et $u'(0)=0$

[3] f est dérivable en $u(0)=-1$ et $f'(u(0))=f'(-1)=2$ alors φ est dérivable en 0 et

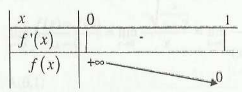
$\varphi'(0)=f'[u(0)]\times u'(0)=2\times0=0$ alors $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2-1)-2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\varphi'(0)=0$

3) a) $g^{-1}(2)=-1$ car $g(-1)=2$. g est dérivable en -1 et $g'(-1)=2\neq0$ alors g^{-1} est dérivable en 2 et $(g^{-1})'(2)=\frac{1}{g'(-1)}=\frac{1}{2}$. b) ζ_g et $\zeta_{g^{-1}}$ sont symétrique par rapport à la droite d'équation y = x.

Exercice N° 4 : 1) On a : $\frac{1-x}{x}\ge0$; si $x\in\,]0,1]\Rightarrow f$ définie, continue sur $]0,1]$ car $x\mapsto\frac{1-x}{x}$ continue sur $]0,1]$; $x\mapsto\frac{1-x}{x}$ est dérivable, $\forall x\in\,]0,1[$; $\frac{1-x}{x}>0\Rightarrow f$ est dérivable sur $]0,1[$.

$$f'(x)=\frac{\frac{-x-1+x}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}}=\frac{-1}{2x^2\sqrt{\frac{1-x}{x}}}<0\ \forall x\in\,]0,1[.\ \lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=-\infty$$

donc f n'est pas dérivable à gauche en 1. C_f admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut à gauche de point $A(1,0)$



x	0		1
$f'(x)$	‖	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0

2) a) f continue, strictement décroissante sur $]0,1]$ donc elle réalise une bijection de $]0,1]$ sur $f(]0,1])=\left[f(1), \lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right[=[0,+\infty[$.

b) On a C_f admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut en $A(1,0)$. Par raison de symétrie par rapport à $\Delta: y=x$, $C_{f^{-1}}$ admet une demi tangente horizontale en $B(0,1)$. Donc $g=f^{-1}$ est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0)=0$.

$2^{ième}$ méthode : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(0)}{x-0}=\lim\limits_{y\to1^-}\frac{y-1}{f(y)-f(1)}\ \lim\limits_{y\to1}\frac{1}{\frac{f(y)-f(1)}{y-1}}=\frac{1}{-\infty}=0$

c) $C_{f^{-1}}=S_{\Delta:y=x}(C_f)$. La droite $x=0$ est un asymptote verticale à C_f au voisinage de 0. Donc la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à $C_{f^{-1}}$ au voisinage de $+\infty$.

d) $f^{-1}[0,+\infty[\to]0,1]$; $f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1-y}{y}}=x\Leftrightarrow\frac{1-y}{y}=x^2\Leftrightarrow1-y=x^2y$

$\Leftrightarrow y(x^2+1)=1\Leftrightarrow y=\frac{1}{x^2+1}$ donc $f^{-1}(x)=\frac{1}{x^2+1}$

Exercice 5: 1)a) $\forall x\in\,]1,+\infty[$ on a $\frac{f(x)}{x-1}=\frac{\sqrt{x^2-1}-(x-1)}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-1}{x-1}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}-1$

b) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}-1=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+}x+1=g(1)=2$ avec $g(x)=x+1$ fonction affine continue en 1 Interprétation graphique : la courbe de f au point d'abscisse 1 et à droite de 1 une demi tangente verticale dirigée vers le haut

c) La fonction $x \mapsto x^2-1$ est une fonction polynôme strictement positive sur $]1,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ La fonction $x \mapsto -x+1$ est une fonction affine donc dérivable sur $]1,+\infty[$, donc f est dérivable sur $]1,+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables $\forall x \in\ ]1,+\infty[$, on a : $f'(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$

2)a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}+1=1$ Puisque

$\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x^2-1}+x=+\infty$ et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$ b) $\forall X\in\ ]1,+\infty[$,

on a $f'(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x^2-(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}(x+\sqrt{x^2-1})}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}(x+\sqrt{x^2-1})}>0$

Or on a f est continue sur $[1,+\infty[$ alors f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$

c) f est une fonction strictement croissante sur $[1,+\infty[$ alors f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f([1,+\infty[)$ or f est continue sur $[1,+\infty[$

alors $f([1,+\infty[)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=[0,1[=J$

x	0		+∞
f'(x)		+	
f(x)	0	↗	1

3)a)La courbe de f admet au point d'abscisse 1 et à droite en 1 une demi tangente verticale alors et par symétrie par rapport à la première bissectrice $(D): y=x$ la courbe de f^{-1} admet à droite de $f(1)=0$ (car f est croissante)une demi tangente horizontale d'où f^{-1} est dérivable à droite en 0 et $(f^{-1})'_d(0)=0$

b) **TABLEAU DE VARIATION**

x	0		+∞
$(f^{-1})'(x)$	0	+	
$f^{-1}(x)$	1	↗	+∞

4)a) $f(\sqrt5)=3-\sqrt5$ et par suite $f^{-1}(3-\sqrt5)=\sqrt5$

b) f est dérivable en $\sqrt5$ et $f'(\sqrt5)=\dfrac{\sqrt5-2}{2}\neq 0$

donc f^{-1} est dérivable en $f(\sqrt5)=3-\sqrt5$ On a $(f^{-1})'(3-\sqrt5)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(3-\sqrt5))}=\dfrac{1}{f'(\sqrt5)}=\dfrac{2}{\sqrt5-2}=2\sqrt5+4$

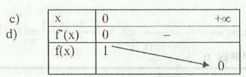
$T: y=(f^{-1})'(3-\sqrt5)(x-3+\sqrt5)+f^{-1}(3-\sqrt5)=(2\sqrt5+4)x-\sqrt5-2$

5)a) $\begin{cases} y=f^{-1}(x)\\ x\in[0,1[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y)=x\\ y\in[1,+\infty[\end{cases}$ $f(y)=x\Leftrightarrow\sqrt{y^2-1}-y+1=x\Leftrightarrow\sqrt{y^2-1}=y+x-1\Leftrightarrow y^2-1=(y+x-1)^2$

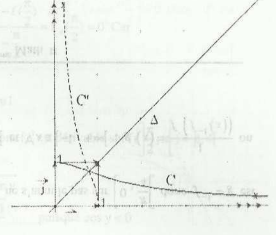
$\Leftrightarrow y^2-1=y^2+x^2+1+2xy-2y-2x\Leftrightarrow y=\dfrac{-x^2+2x-2}{2(x-1)}=f^{-1}(x)$ .b) $f(x)=\dfrac{\sqrt2}{2}\Leftrightarrow x=f^{-1}(\dfrac{\sqrt2}{2})=\dfrac{5-\sqrt2}{4-2\sqrt2}$

Exercice n°6 : 1) a) b) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc c'est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f\langle\mathbb{R}_+\rangle$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $f\langle\mathbb{R}_+\rangle=\left]\lim\limits_{+\infty}f,f(0)\right]=]0;1]$

c)
d)



x	0		+∞
f'(x)	0	−	
f(x)	1	↘	0



$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f^{-1}(x)}{x-1}=-\infty$

2) a) f est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$ donc pour tout $x_0\in\left]\dfrac{\sqrt3}{2},1\right[$ on a : $\begin{cases} \text{f est continue sur } [0,x_0]\\ \text{f est dérivable sur }]0,x_0[\end{cases}$ alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c\in\ ]0,x_0[$ tel que : $f(x_0)-f(0)=(x_0-0)f'(c)$ et comme f(0) = 1 donc $f(x_0)=1+x_0.f'(c)$.

b) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt3}{2}<x_0<1\\ \text{f est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+\end{cases}$ alors $f\left(\dfrac{\sqrt3}{2}\right)<f(x_0)<f(1)\Rightarrow f(1)-1<f(x_0)-1<f\left(\dfrac{\sqrt3}{2}\right)-1$.

$\begin{cases} 0<-f\left(\dfrac{\sqrt3}{2}\right)+1<-f(x_0)+1<-f(1)+1\\ 1<\dfrac{1}{x_0}<\dfrac{2}{\sqrt3}\end{cases}$ alors $-f\left(\dfrac{\sqrt3}{2}\right)+1<-\left[\dfrac{f(x_0)-1}{x_0}\right]<\dfrac{2(-f(1)+1)}{\sqrt3}$ donc

$\dfrac{2(f(1)-1)}{\sqrt3}<f'(c)<f\left(\dfrac{\sqrt3}{2}\right)-1\Rightarrow\dfrac{\sqrt2-2}{\sqrt3}<f'(c)<\dfrac{2\sqrt7-7}{7}\Rightarrow-0,34<f'(c)<-0,24$

3) $f^{-1}:]0;1]\to[0,+\infty[; x\mapsto f^{-1}(x)=y$. $f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}}=x\Leftrightarrow y^2+1=\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

(car x et y sont positifs). Donc $f^{-1}(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Exercice N° 7 : 1) f une fonction polynôme dérivable sur IR en particulier sur $[-1;+\infty[$ et positive donc f est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$. f est contenue strictement croissante sur $[-1;+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[-1;+\infty[$ sur $f([-1;+\infty[)=\left[f(-1);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=[0;+\infty[=J$

2) On pose $g(x)=\sqrt[3]{x}-1\ \ \forall\ x\in[0;+\infty[$; $f\circ g(x)=(\sqrt[3]{x}-1)^3+3(\sqrt[3]{x}-1)^2+3(\sqrt[3]{x}-1)+1=x$

$\forall\ x\in[0;+\infty[$ .Donc $f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt[3]{x}-1\ \forall\ x\in[0;+\infty[$.

3) $x\mapsto\sin x$ est dérivable sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$; $\forall\ x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin x>0\Rightarrow g: x\mapsto\sqrt[3]{\sin}-1$ dérivable sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$;

$g'(x)=\dfrac{\cos x}{3\left(\sqrt[3]{\sin^2 x}\right)}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	‖	+	
$g(x)$	-1	↗	0

Exercice N° 8: 1-a) $g'(x)=\dfrac{-1}{x^2}-\cos x<0\ \forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	‖	-	
$g(x)$	+∞	↘	$\frac{2-2\pi}{\pi}$

b) g est continue et strictement décroissante sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc g réalise une bijection de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[\dfrac{2-2\pi}{\pi},+\infty\right[$. c) $f(x)=x\Leftrightarrow f(x)-x=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{1+\sin x}-x=0\Leftrightarrow\dfrac{1-x-x\sin x}{1+\sin x}=0$

$\Leftrightarrow x\left(\dfrac{\frac{1-x}{x}-\sin x}{1+\sin x}\right)=0$. $f(x)=x\Leftrightarrow\dfrac{xg(x)}{1+sinx}=0\Leftrightarrow xg(x)=0\Leftrightarrow g(x)=0$ car $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, g réalise une bijection de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[\dfrac{2-2\pi}{\pi},+\infty\right[$,$0\in\left[\dfrac{2-2\pi}{\pi},+\infty\right[$ donc il existe un unique $\alpha\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $g(\alpha)=0\Leftrightarrow f(\alpha)=\alpha$

2) f est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f'(x)=\dfrac{-\cos x}{(1+\sin x)^2}<0$. f est continue et strictement décroissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc f réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]\dfrac{1}{2},1\right]$.

3) $f(x)=\dfrac{1}{1+\sin x}$; $1+\sin x=\dfrac{1}{f(x)}$; $\sin x=\dfrac{1-f(x)}{f(x)}$

a) $x\in\left]\dfrac{1}{2},1\right]$; $f^{-1}(x)\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$. $\sin(f^{-1}(x))=\dfrac{1-f(f^{-1}(x))}{f(f^{-1}(x))}=\dfrac{1-x}{x}$

$\cos(f^{-1}(x))=\sqrt{1-\sin^2(f^{-1}(x))}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}$

$\sin\left(f^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)\right)=\dfrac{1-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{2}$ et $f^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $f^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{\pi}{6}$, $\sin\left(f^{-1}(2-\sqrt2)\right)=\dfrac{1-2+\sqrt2}{2\sqrt2}=\dfrac{\sqrt2}{2}$ et

$f^{-1}(2-\sqrt2)\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $f^{-1}(2-\sqrt2)=\dfrac{\pi}{4}$.

c) $f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\dfrac{1}{1+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}=\dfrac{1}{1+\cos x}$; $0\le x<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 0<\cos x\le 1$; $1<1+\cos x\le 2$, $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{1+\cos x}<1$

, $f^{-1}\left(f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)=f^{-1}\left(\dfrac{1}{1+\cos x}\right)=\dfrac{\pi}{2}-x$; $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\dfrac{\pi}{2}-x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. $f^{-1}\left(\dfrac{1}{1+\cos x}\right)=\dfrac{\pi}{2}-x$

Exercice N° 9 : 1) pour $0\le x<\dfrac{\pi}{4}$ on a $0\le\tan x<1\Rightarrow 1-\tan x>0$ donc $1-\tan(x)\neq 0$ ainsi f est définie, contenue, dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[$ et $f'(x)=\dfrac{1+\tan^2 x}{(1-\tan x)^2}>0$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^-}\dfrac{1}{1-\tan x}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$	+		‖
$f(x)$	1	↗	+∞ ‖

f est continue , strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[$ donc f réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[$ sur $f\left(\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[\right)=[1,+\infty[$

2) f est dérivable , strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[$ et f' ne s'annule pas sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[$ donc $f^{-1}=g$ est dérivable sur $f\left(\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[\right)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^-}f(x)\right[=[1,+\infty[$ et $\forall x\in[-1,+\infty[$; $g'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ on

pose $f^{-1}(x)=y$ donc $f(y)=x \Leftrightarrow \frac{1}{1-\tan y}=x$ alors $1-\tan y=\frac{1}{x}$ d'où

$$\tan y=1-\frac{1}{x},\ g'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{\frac{1+\tan^2 y}{(1-\tan y)^2}}=\frac{(1-\tan y)^2}{1+\tan^2 y}=\frac{\left(1-1+\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{x^2}}{1+1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}$$

$$=\frac{1}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)}=\frac{1}{2x^2+1-2x}$$

3) a) $h(x)=g\left(\frac{1+\tan x}{2}\right)\ \forall x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$. $x\mapsto\frac{1+\tan x}{2}$ est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ $\frac{1+\tan x}{2}\geq 1$ car $\forall x\geq\frac{\pi}{4}$; $\tan x\geq 1\Rightarrow 1+\tan x\geq 2$; $\frac{1+\tan x}{2}\geq 1$; g est dérivable sur $[1,+\infty[$ donc h est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et

$$h'(x)=g'\left(\frac{1+\tan x}{2}\right)\left(\frac{1+\tan^2 x}{2}\right)=\frac{1}{2\left(\frac{1+\tan x}{2}\right)^2-2\left(\frac{1+\tan x}{2}\right)+1}\left(\frac{1+\tan^2 x}{2}\right)=\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=1$$

b) $h'(x)=1\ \forall x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ d'où $h(x)=x+k$ *avec* $k\in IR$, or $h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+k$ et $h\left(\frac{\pi}{4}\right)=g\left(\frac{1+\tan\frac{\pi}{4}}{2}\right)$ $=g(1)=0$ d'où $\frac{\pi}{4}+k=0\Leftrightarrow k=-\frac{\pi}{4}$ donc $g(x)=x-\frac{\pi}{4}\ \forall\ x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

<u>**Exercice 10**</u>**:**1)a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ $\forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ On a $f'(x)=-6\cos x\sin x$, signe de $f'(x)$: si $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow f'(x)=0$ Si $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[\Rightarrow f'(x)>0$ car $\sin x>0$ et $\cos x<0\Rightarrow f'(x)\geq 0$

x	$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	1	↗	4

b) f est strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ donc f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ sur $f(\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[)$ et Puisque f est continue sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ alors $f(\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[)=\left[f(\frac{\pi}{2}),\lim_{x\to\pi^-}f\right[=[1,4[=J$

2) a) $\lim_{x\to 1^+}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{1}{\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}}=+\infty$ puisque $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}=f'_d(\frac{\pi}{2})=0^+$ Car pour $x>\frac{\pi}{2}$, $f(x)>f(\frac{\pi}{2})$ alors f^{-1} n'est pas dérivable à droite en 1

b) f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ et $f'(x)\neq 0$ pour tout $x\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ donc f^{-1} est dérivable sur $f(\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[)=]1,4[$

c)Pour $x\in]1,4[$ on a $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{-6\cos y\sin y}$

$$\begin{cases}f^{-1}(x)=y\\ x\in]1,4[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(y)=x\Leftrightarrow 1+3\cos^2 y=x\Leftrightarrow\cos y=-\sqrt{\frac{x-1}{3}}\\ y\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\end{cases}$$ puisque $\cos y<0$

On a $\cos^2 y+\sin^2 y=1\Leftrightarrow\sin y=+\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{\frac{4-x}{3}}$ puisque $\sin y>0$

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{-6\cos y\sin y}=\frac{1}{6\sqrt{(\frac{x-1}{3})(\frac{4-x}{3})}}=\frac{1}{2\sqrt{-x^2+5x-4}}$$

d) Par la forme conique : $\sqrt{-x^2+5x-4}=\sqrt{-(x^2-5)-4}=\sqrt{-((x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4})-4}=\sqrt{-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{9}{4}}$ Par encadrement dans l'intervalle $\left]\frac{7}{4},\frac{13}{4}\right[$ on a $-\frac{3}{4}<x-\frac{5}{2}<\frac{3}{4}$ donc $0<\left|x-\frac{5}{2}\right|<\frac{3}{4}$ D'où $\frac{3}{4}<\frac{3\sqrt{3}}{4}<\sqrt{-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{9}{4}}<\frac{3}{2}$ 3)a) $f(\frac{2\pi}{3})=\frac{7}{4}$ et $f(\frac{5\pi}{6})=\frac{13}{4}$

b) On pose $g(x)=f^{-1}(x)-x$ par suite $f^{-1}(x)=x\Leftrightarrow g(x)=0$ .La fonction g est continue sur $\left]\frac{7}{4},\frac{13}{4}\right[$ et $g(\frac{7}{4})g(\frac{13}{4})<0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution $\alpha\in\left]\frac{7}{4},\frac{13}{4}\right[$. La fonction g est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables : $g'(x)=(f^{-1})'(x)-1<0$ car $(f^{-1})'(x)<\frac{2}{3}<1$ Donc g est strictement décroissante sur $\left]\frac{7}{4},\frac{13}{4}\right[$ alors α est unique.

4) On a $\forall x\in\left]\frac{7}{4},\frac{13}{4}\right[$, $\frac{1}{3}<(f^{-1})(x)<\frac{2}{3}$, f^{-1} est continue sur $[\alpha,x]\subset\left]\frac{7}{4},\frac{13}{4}\right[$ et dérivable sur $[\alpha,x]$ donc

d'après le théorème des inégalité des accroissement finis :
$\frac{1}{3}(x-\alpha)<f^{-1}(x)-f^{-1}(\alpha)<\frac{2}{3}(x-\alpha)$ avec $f^{-1}(\alpha)=\alpha\ \forall x\in\left]\alpha,\frac{13}{4}\right[$ on a $\frac{1}{3}(x+2\alpha)\leq f^{-1}(x)\leq\frac{1}{3}(2x+\alpha)$

<u>***Exercice n°11 :***</u> **A/** 1) a) $D_f=[-1,1]\setminus\{0\}$. $\forall x\in D_f,-x\in D_f$ et $f(-x)=-f(x)$ Donc f est impaire.

b)

Posons $\varphi(x)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}, x<1$. $\varphi(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x(x-1)}=\frac{-(x+1)}{x\sqrt{1-x^2}}$ Donc $\lim_{1^-}\varphi=-\infty$ alors f n'est dérivable à gauche en 1. ζ admet au point (1 ;0) une demi tangente verticale d'équation : $\begin{cases}x=1\\ y\geq 0\end{cases}$. c)

x	0		1
$f'(x)$		—	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0

$D_E=]0;1]$. f est continue sur]0 ;1]. $\lim_{0^+}f=+\infty$ et f(1) = 0. f est dérivable sur]0 ;1[et $f'(x)=\frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

d) Voir figure.
2) a) f est bijective de]0 ;1] vers[0,+∞[.
b) $\begin{cases}f^{-1}(x)=y\\ x\in[0,+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(y)=x\\ y\in]0;1]\end{cases}$. $f(y)=x\Leftrightarrow\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}=x\Leftrightarrow\sqrt{1-y^2}=xy\Leftrightarrow 1-y^2=x^2y^2\Leftrightarrow y^2(1+x^2)=1\Leftrightarrow$

$y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ car $y>0$ d'où : $\forall x\geq 0, f^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

B/ 1) a)

b) <u>***Conjecture :***</u>* U n'est pas monotone.* U est convergente.
2)Posons $\varphi(x)=g(x)-x, x\geq 0$. $\varphi'(x)=g'(x)1<0$ donc φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ lors elleréalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\varphi\langle\mathbb{R}_+\rangle$ et comme φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ alors $\varphi\langle\mathbb{R}_+\rangle=\left]\lim_{+\infty}\varphi,\varphi(0)\right]=]-\infty,1]$ et puisque $0\in]-\infty,1]$ alors il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+$, unique tel que : $\varphi(\alpha)=0$.

$\varphi(\alpha)=0\Leftrightarrow g(\alpha)=\alpha$. $\left.\begin{array}{l}\varphi(0)=1>0\\ \varphi(1)=g(1)-1<0\end{array}\right\}\Rightarrow 0<\alpha<1$

3) a) Démontrons par récurrence que : P_n :"$\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq U_n\leq 1$" . <u>Pour n = 0</u>, $0\leq U_0=0\leq 1$ d'où P_0 est vraie. <u>Supposons que :</u> $0\leq U_n\leq 1$ et montrons que $0\leq U_{n+1}\leq 1$. On a :
$0\leq U_n\leq 1$ et g est décroissante sur $\mathbb{R}_+\Rightarrow g(1)\leq g(U_n)\leq g(0)$ or $g(1)\geq 0$ et $g(0)=1$ donc $0\leq U_{n+1}\leq 1$.

<u>**Conclusion :**</u> $\forall n\in\mathbb{N}: 0\leq U_n\leq 1$. b) $\begin{cases}g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+\\ \forall x\in\mathbb{R}_+, \left|g'(x)\leq\frac{1}{2}\right|\end{cases}$ donc, d'après les inégalités des accroissements finis, pour tout a et b $\in\mathbb{R}_+$, $|g(b)-g(a)|\leq\frac{1}{2}|b-a|$ et comme $U_n\geq 0$ et $\alpha\geq 0$ alors pour $a=\alpha$ et $b=U_n$, on obtient : $|g(U_n)-g(\alpha)|\leq\frac{1}{2}|U_n-\alpha|$ or $g(U_n)=U_{n+1}$ et $g(\alpha)=\alpha$ donc $|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|U_n-\alpha|$. c) Démontrons par récurrence que : P_n :"$\forall n\in\mathbb{N}, |U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\alpha$". <u>Pour n = 0,</u> $|U_0-\alpha|=\alpha\leq\left(\frac{1}{2}\right)^0\alpha$ d'où P_0 est vraie. <u>Supposons que :</u> P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie. On a :

$|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\alpha\Rightarrow\frac{1}{2}|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\alpha$ or $|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|U_n-\alpha|$ donc $|U_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\alpha$ d'où P_{n+1} est vraie. <u>***Conclusion :***</u> $\forall n\in\mathbb{N}, |U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\alpha$.

d) $\forall n\in\mathbb{N}, |U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\alpha$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\alpha=0\Rightarrow$ U converge et $\lim_{n\to+\infty}U_n=\alpha$

<u>***Exercice N° 12 :***</u>A) $f(x)=\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}+1\ \ \forall\ x\in IR$ 1) a) $x\mapsto 1+x^2$ est dérivable et strictement positive sur $IR\Rightarrow x\mapsto\sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur IR, de plus $x\mapsto x$ est dérivable sur IR. Ainsi f est dérivable sur IR. $\forall x\in IR$, $f'(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}x}{\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1+x^2}$

b)

x	$-\infty$	
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	↗ 2

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x\left(-\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)}+1=\dfrac{-1}{-\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}+1=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)}+1=2$

2) a) $\forall x\in IR$, $-x\in IR$; $f(-x)+f(x)=\dfrac{-x}{1+\sqrt{1+x^2}}+1+\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}+1=2$. Donc le point $I(0\,;1)$ est un centre de symétrie de C. b) $(T): y=f'(0)x+f(0)$ $(T): y=\dfrac{1}{2}x+1$

c)Ona: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ donc les droites d'équations $y=0$ *et* $y=2$ sont deux asymptotes à C.

3) a) f est continue et strictement croissante sur IR donc elle réalise une bijection de IR sur $f(IR)=]0\,,2[$. b) On pose $f^{-1}(x)=y$ avec $x\in]0\,,2[$ *et* $y\in IR$

$f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow\dfrac{y}{1+\sqrt{1+y^2}}+1=x\Leftrightarrow\dfrac{y}{1+\sqrt{1+y^2}}=x-1\Leftrightarrow\dfrac{y}{x-1}=1+\sqrt{1+y^2}$ avec $(x\neq1)$

$\Leftrightarrow\dfrac{y}{x-1}-1=\sqrt{1+y^2}$ $\dfrac{y^2}{(x-1)^2}+1-\dfrac{2y}{x-1}=1+y^2\Leftrightarrow y^2\left(\dfrac{1}{(x-1)^2}-1\right)=\dfrac{2y}{x-1}\Leftrightarrow y^2\left(\dfrac{1-(x-1)^2}{(x-1)^2}\right)=\dfrac{2y(x-1)}{(x-1)^2}$

$\Leftrightarrow y(1-x^2+2x-1)=2(x-1)\Leftrightarrow y=\dfrac{2(x-1)}{2x-x^2}$ de plus $f(0)=1$ donc $f^{-1}(1)=0$ et par suite

$\forall x\in]0;2[$; $f^{-1}(x)=\dfrac{2(x-1)}{2x-x^2}$. c) C et C' sont symétriques par rapport à la droite $\Delta=y=x$.

B) 1) a) $x\mapsto\tan x$ est continue sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ de plus f est continue sur IR. Donc F est continue sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. b) Soit $x\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$; $F(x)=f(\tan x)=\dfrac{\tan x}{1+\sqrt{1+\tan^2 x}}+1=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+1$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} F(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(\tan x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc F est continue sur $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$=\dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}+1=\tan\dfrac{x}{2}+1$; pour $x=\dfrac{\pi}{2}$; $\begin{cases}F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\\ 1+\tan\dfrac{\pi}{4}=2\end{cases}$

2) a) F est continue et dérivable sur $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$; $\forall x\in\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$; $F'(x)=\dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)>0$ Donc F est strictement croissante sur $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$. F réalise une bijection de $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $F\left(\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)=[1\,;2]$. F admet alors une fonction réciproque F^{-1} définie sur $[1,2]$

b) On a : F est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $F'(x)\neq0$ donc F^{-1} est dérivable sur $[1,2]$;

$\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $(F^{-1})'(x)=\dfrac{1}{F'(F^{-1}(x))}$. On pose $F^{-1}(x)=y$ avec $\begin{cases}x\in[1,2]\\ y\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}$

$(F^{-1})'(x)=\dfrac{1}{F'(y)}=\dfrac{2}{1+\tan^2\dfrac{y}{2}}$ Or $F^{-1}(x)=y$ Donc $F(y)=x$

$\forall x\in[1,2]$; $(F^{-1})'(x)=\dfrac{2}{1+(x-1)^2}=\dfrac{2}{x^2-2x+2}$ .c) On pose $g(x)=F^{-1}(x)+F^{-1}\left(\dfrac{2}{x}\right)$; On a $x\to\dfrac{2}{x}$ est dérivable sur $[1\,,2]$ et $\forall x\in[1,2]$, $\dfrac{1}{2}\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, $\dfrac{2}{x}\in[1\,,2]$ F^{-1} est dérivable sur $[1\,,2]$ donc $x\mapsto F^{-1}\left(\dfrac{2}{x}\right)$ est dérivable sur $[1\,,2]$ et par suite g est dérivable sur $[1\,,2]$,

$g'(x)=(F^{-1})'(x)-\dfrac{2}{x^2}(F^{-1})'\left(\dfrac{2}{x}\right)=\dfrac{2}{x^2-2x+2}-\dfrac{2}{x^2}\times\dfrac{2}{\left(\dfrac{2}{x}\right)^2-2\times\dfrac{2}{x}+2}=\dfrac{2}{x^2-2x+2}-\dfrac{4}{x^2\left(\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{4}{x}+2\right)}$

$=\dfrac{2}{x^2-2x+2}-\dfrac{4}{4-4x+2x^2}=\dfrac{2}{x^2-2x+2}-\dfrac{2}{x^2-2x+2}=0$ Donc g est constante sur $[1\,,2]$,

$g(x)=g(1)=F^{-1}(1)+F^{-1}(2)$ Or $F^{-1}(1)=0$ car $F(0)=1$; $F^{-1}(2)=\dfrac{\pi}{2}$ d'où $g(x)=\dfrac{\pi}{2}$ $\forall x\in[1,2]$.

3) a) On a : $\forall k\in\{0,1,2,........,n\}(n\in IN^*)$; $n+k\in\{n,n+1,........,2n\}$; $n\le n+k\le 2n$; $\dfrac{1}{2n}\le\dfrac{1}{n+k}\le\dfrac{1}{n}$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2n}+1\le\dfrac{1}{n+k}+1\le\dfrac{1}{n}+1$. On a $1\le\dfrac{1}{2n}+1$ et $\dfrac{1}{n}+1\le2$, or F^{-1} est croissante sur $[1,2]$

donc $F^{-1}\left(\dfrac{1}{2n}+1\right)\le F^{-1}\left(\dfrac{1}{n+k}+1\right)\le F^{-1}\left(\dfrac{1}{n}+1\right)$.

b) $\sum\limits_{k=0}^{n}F^{-1}\left(\dfrac{1}{2n}+1\right)\le\sum\limits_{k=0}^{n}F^{-1}\left(\dfrac{1}{n+k}+1\right)\le\sum\limits_{k=0}^{n}F^{-1}\left(\dfrac{1}{n}+1\right)$, $(n+1)F^{-1}\left(\dfrac{1}{2n}+1\right)\le U_n\le(n+1)F^{-1}\left(\dfrac{1}{n}+1\right)$

$F^{-1}\left(\dfrac{1}{2n}+1\right)\le\dfrac{U_n}{n+1}\le F^{-1}\left(\dfrac{1}{n}+1\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}F^{-1}\left(\dfrac{1}{2n}+1\right)=F^{-1}(1)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}F^{-1}\left(\dfrac{1}{n}+1\right)=F^{-1}(1)=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{U_n}{n+1}=0$.

c) $\dfrac{2}{\dfrac{1}{n+k}+1}=\dfrac{2}{\dfrac{1+n+k}{n+k}}=\dfrac{2(n+k)}{1+n+k}$; $F^{-1}\left(\dfrac{1}{n+k}+1\right)+F^{-1}\left(\dfrac{2}{\dfrac{1}{n+k}+1}\right)=\dfrac{\pi}{2}$;

$F^{-1}\left(\dfrac{2}{\dfrac{1}{n+k}+1}\right)=\dfrac{\pi}{2}-F^{-1}\left(\dfrac{1}{n+k}+1\right)$; $\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}F^{-1}\left(\dfrac{2n+2k}{1+n+k}\right)=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}F^{-1}\left(\dfrac{1}{n+k}+1\right)$

$=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}F^{-1}\left(\dfrac{1}{n+k}+1\right)$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}F^{-1}\left(\dfrac{2(n+k)}{1+n+k}\right)=\dfrac{\pi}{2}-0=\dfrac{\pi}{2}$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice N° 13 :1) a) $f'(x)=\dfrac{-2x^2-4x}{(x^2+2x+2)^2}<0\ \forall x>0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0

b) On pose $g(x)=f(x)-x$; $g'(x)=f'(x)-1<0$ $\forall x\in IR_+$ (car $f(x)$ admet 1 comme maximum absolu sur $[0\,;+\infty[$) g est continue et strictement décroissante sur IR_+ donc elle réalise une bijection de IR_+ sur $g(IR_+)=]-\infty\,,1]$. Or $0\in]-\infty\,,1]$ donc il existe une unique réel $\alpha\in[0\,;+\infty[$ tel que

$g(\alpha)=0\Leftrightarrow f(\alpha)=\alpha$, $g\left(\dfrac{4}{5}\right)=0.049$; $g(1)=-0.2$; $g\left(\dfrac{4}{5}\right)\times g(1)<0\Rightarrow\alpha\in\left]\dfrac{4}{5}\,;1\right[$

c) 2) a) $U_0=\dfrac{45}{50}$; $U_0\in\left]\dfrac{4}{5},1\right[$. Supposons que $U_n\in\left]\dfrac{4}{5}\,;1\right[$ et montrons que $U_{n+1}\in\left]\dfrac{4}{5}\,;1\right[$. On a $\dfrac{4}{5}<U_n<1$; f est strictement décroissante sur IR_+ alors $f\left(\dfrac{4}{5}\right)>f(U_n)>f(1)\Leftrightarrow\dfrac{4}{5}<U_{n+1}<1$ enfin d'après le principe de récurrence $\dfrac{4}{5}<U_n<1$.

b) $|f'(x)|-\dfrac{1}{4}=\dfrac{4(2x^2+4x)-(x^2+2x+2)^2}{(x^2+2x+2)^2}=\dfrac{-\left[(x+1)^2-3\right]^2}{(x^2+2x+2)^2}\le0$. Donc $|f'(x)|\le\dfrac{1}{4}$

c) f est dérivable sur IR_+ ; $|f'(x)|\le\dfrac{1}{4}$. D'après le théorème des accroissement finis ,

$|f(x)-f(\alpha)|\le\dfrac{1}{4}|x-\alpha|$. Comme $U_n\in IR_+$; $|f(U_n)-\alpha|\le\dfrac{1}{4}|U_n-\alpha|\Leftrightarrow|U_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{4}|U_n-\alpha|$

Pour $n=0$; $|U_0-\alpha|=\left|\dfrac{45}{50}-\alpha\right|$ or $\dfrac{4}{5}<\alpha<1\Rightarrow-1\le-\alpha\le-\dfrac{4}{5}$; $\dfrac{4}{5}<U_0<1$ alors $-\dfrac{1}{5}\le U_0-\alpha\le\dfrac{1}{5}$

$\Leftrightarrow|U_0-\alpha|\le\dfrac{1}{5}<1$; $\left(\dfrac{1}{4}\right)^0=1\Rightarrow|U_0-\alpha|<\left(\dfrac{1}{4}\right)^0$. Vrai pour $n=0$.

On suppose que $|U_n-\alpha|<\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ $\forall$ $n\in IN^*$ montrons que $|U_{n+1}-\alpha|<\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$.

$|U_n-\alpha|\le\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ et $|U_{n+1}-\alpha|<\dfrac{1}{4}|U_n-\alpha|\Rightarrow|U_n-\alpha|\le\left(\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\le\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$ Donc d'après le principe de récurrence sur IR_+ $|U_n-\alpha|<\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=0$ car $-1<\dfrac{1}{4}<1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|U_n-\alpha|=0$,

$\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-\alpha)+\alpha=0+\alpha=\alpha$.

3) a) f est continue et strictement décroissante sur IR_+ donc elle réalise une bijection de IR_+ sur $f(IR_+)=]0\,,1]$. b) Voir figure. c) $f^{-1}:]0\,,1]\to IR_+$; $x\mapsto f^{-1}(x)=y$

$f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow\dfrac{2(y+1)}{y^2+2y+2}=x\Leftrightarrow 2y+2=xy^2+2yx+2x$

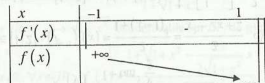
$\Leftrightarrow xy^2+y(2x-2)+2x-2=0$. $\Delta=4(1-x^2)\ge0$ $\forall x\in]0\,,1]$. Donc $y=\dfrac{2-2x-2\sqrt{1-x^2}}{2x}$ ou

$y=\dfrac{2-2x+2\sqrt{1-x^2}}{2x}$. Or $y\in[0\,,+\infty[$; $\dfrac{2-2x-2\sqrt{1-x^2}}{2x}=\dfrac{2x(x-1)}{x\left(1-x+\sqrt{1-x^2}\right)}$ pour tout $x\in]0;1]$. Donc

Exercice N° 14:1)a) Pour $-1<x<1\Leftrightarrow0<1+x<2\Rightarrow0<\dfrac{\pi}{2}(1+x)<\pi$, donc $\dfrac{\pi}{2}(1+x)\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

f définie, continue et dérivable sur $]-1;1[$ et $f'(x)=\dfrac{\pi}{2}\left(+1+\cot^2\left(\dfrac{\pi}{2}(1-x)\right)\right)<0$ $\forall x\in]-1\,;1[$

x	-1	1
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$



f continue , strictement décroissante sur $]-1,1[$ donc f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur $f(]-1,1[)=\left]\lim\limits_{x\to1^-}f(x),\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)\right[=IR$.

b) f dérivable sur $]-1\,;1[$ et $f'(x)\neq0\forall x\in]-1\,;1[$ Donc f^{-1} et dérivable sur $f(]-1\,,1[)=IR$ et

$(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. On pose $(f^{-1}(x))=y$ donc $f(y)=x$

$-1+\cot g\frac{\pi}{2}(y+1)=x \Leftrightarrow \cot g\frac{\pi}{2}(y+1)=x+1$

$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}=-\frac{2}{\pi\left(1+\cot^2\left(\frac{\pi}{2}[y+1]\right)\right)}=-\frac{2}{\pi\left[1+(1+x)^2\right]}$

2) $F(x)=f^{-1}(x-1)+f^{-1}\left(\frac{1}{x}-1\right)$; $x\mapsto x-1$ dérivable sur IR en particulier sur IR^* et pour tout $x\in IR^*$, $x-1\in IR \Rightarrow f^{-1}$ est dérivable sur IR^*. Donc $F_1 : x\mapsto f^{-1}(x-1)$ dérivable sur IR^* et

$F_1'(x)=1\times(f^{-1})'(x-1)=-\frac{2}{\pi(1+x^2)}$. $x\mapsto \frac{1}{x}-1$ est dérivable sur IR^*, et pour tout $x\in IR^*$, $\frac{1}{x}-1\in IR$ et

f^{-1} dérivable sur IR^*. Donc $F_2 : x\mapsto f^{-1}\left(\frac{1}{x}-1\right)$ est dérivable sur IR^* et $F_2'(x)=-\frac{1}{x^2}\times(f^{-1})'\left(\frac{1}{x}-1\right)$

$=-\frac{1}{x^2}\left(-\frac{2}{\pi\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right)=\frac{2}{\pi(x^2+1)}$. Enfin F est dérivable sur IR^* et

$F'(x)=-\frac{2}{\pi(1+x^2)}+\frac{2}{\pi(1+x^2)}=0 \quad \forall x\in IR^*$

b) pour $x\in IR^*$, $F'(x)=0\Rightarrow \forall\, x\in\,]0,+\infty[$, $F(x)=c_1$ et $\forall\, x\in\,]-\infty,0[$, $F(x)=c_2$ avec c_1 et c_2 sont deux constantes de IR .

- $F(1)=f^{-1}(0)+f^{-1}(0)=2f^{-1}(0)$. On pose $f^{-1}(0)=\alpha \Leftrightarrow f(\alpha)=0 \Leftrightarrow -1+\cot\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right)=0$
- $\Leftrightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right)=1$ Or $0<\frac{\pi}{2}(\alpha+1)<\pi$ donc $\frac{\pi}{2}(\alpha+1)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \alpha=-\frac{1}{2}$ c'est-à-dire

$f^{-1}(0)=-\frac{1}{2}$; $F(1)=-1$

- $F(-1)=f^{-1}(-2)+f^{-1}(-2)=2f^{-1}(-2)$. On pose $f^{-1}(-2)=\beta \Leftrightarrow f(\beta)=-2$

$\Leftrightarrow -1+\cot\left(\frac{\pi}{2}(\beta+1)\right)=-2 \Leftrightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2}(\beta+1)\right)=-1$ Or $0<\frac{\pi}{2}(\beta+1)<\pi$ donc $\frac{\pi}{2}(\beta+1)=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow \beta=\frac{1}{2}$ c'est-à-dire $f^{-1}(-2)=\frac{1}{2}$ alors $F(-1)=1$. Conclusion : $F(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x\in\,]0,+\infty[\\ 1 & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\end{cases}$

3) a) $f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)+f^{-1}\left(-\frac{1}{1+k}\right)=f^{-1}\left(\left(\frac{1}{k}+1\right)-1\right)+f^{-1}\left(\frac{1}{\frac{1}{k}+1}-1\right)=F\left(\frac{1}{k}+1\right)=-1$ car : $\frac{1}{k}+1>0$.

b) $U_n=\sum_{k=1}^{n}\left[f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)+f^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)\right]=\sum_{k=1}^{n}f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=1}^{n}f^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)$ Or On a : $f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)+f^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right)=-1$ alors $f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)=-1-f^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right)$ Donc $U_n=\sum_{k=1}^{n}\left[-1-f^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right)+f^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)\right]$.

$=\sum_{k=1}^{n}-1+\sum_{k=1}^{n}\left[f^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)-f^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right)\right]$

$=-n+f^{-1}(-1)-f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+......+f^{-1}\left(-\frac{1}{n}\right)-f^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)=-n+f^{-1}(-1)-f^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$

On pose $f^{-1}(-1)=z \Leftrightarrow -1+\cot\frac{\pi}{2}(z+1)=-1 \Leftrightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2}(z+1)\right)=0$ et $0<\frac{\pi}{2}(z+1)<\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}(z+1)=\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow z+1=1\Leftrightarrow z=0$ d'où $f^{-1}(-1)=0$ donc $U_n=-n-f^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$.

$W_n=\frac{1}{n}U_n=-1-\frac{1}{n}f^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$. $\lim_{n\to+\infty}f^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)=f^{-1}(0)=-\frac{1}{2}$; $\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}f^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)=0$ d'où $\lim_{n\to+\infty}W_n=-1$ par suite (W_n) est convergente.

Exercice N° 15: 1) a) Pour $-1<x<1\Leftrightarrow -1<-x<1\Rightarrow 0<1-x<2$ et $0<\frac{\pi}{4}(1-x)\le\frac{\pi}{2}$ d'où $\cot\frac{\pi}{4}(1-x)\ge 0$ pour tout $x\in[-1\,;1[$. Ainsi f est définie sur $[-1\,;1[$. f est dérivable sur l'ensemble :

$D_d=\left\{x\in[-1,1[\text{ tel que }\cot\frac{\pi}{4}(1-x)>0\right\}$ Or pour tout $x\in[-1\,;1[$ $\cot\frac{\pi}{4}(1-x)\ge 0$. On élimine x de $[-1,1[$ tel que $\cot\frac{\pi}{4}(1-x)=0$; $\cot\frac{\pi}{4}(1-x)=0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}(1-x)=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow 1-x=2+4k \Leftrightarrow x=-1-4k$ or $x\in[-1\,;1[\, \Leftrightarrow -1\le -1-4k<1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<k\le 0$ donc $k=0$ et par suite $x=-1$. Ainsi f est dérivable sur

$]-1\,,1[$ et $f'(x)=\frac{\left(1+\cot^2\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right)\right)\frac{\pi}{4}}{3\sqrt[3]{\left(\cot\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right)\right)^2}}=\frac{\pi\left(1+\cot^2\frac{\pi}{4}(1-x)\right)}{12\sqrt[3]{\left(\cot\frac{\pi}{4}(1-x)\right)^2}}>0$.

b) $\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1^+}\frac{\sqrt[3]{\left(\cot\frac{\pi}{4}(1-x)\right)^2}}{x+1}$ se présente comme forme indéterminée.

On pose $y=x+1$ et $x=y-1$ lorsque $x\to(-1)^+$; $y\to 0^+$ donc

$\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-0^+}\frac{\sqrt[3]{\left(\cot\frac{\pi}{4}(1-y+1)\right)}}{y}=\lim_{x\to-0^+}\frac{\sqrt[3]{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}y\right)}}{y}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{\tan\left(\frac{\pi}{4}y\right)}}{y}$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}y\right)}{y}\frac{\sqrt[3]{\tan\left(\frac{\pi}{4}y\right)}}{\sqrt[3]{\left(\tan\frac{\pi}{4}y\right)^3}}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}y\right)}{y}\frac{1}{\sqrt[3]{\tan^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)}}=\frac{\pi}{4}\times(+\infty)=+\infty$ enfin

$\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=+\infty$. f n'est pas dérivable à droite en (-1) et C_f admet une demi tangente verticale à gauche au point $A(-1;0)$ dirigée vers le haut. $\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi}{4}(1-x)=0^+$ et $\lim_{x\to 0^+}\cot x=+\infty$.

Donc $\lim_{x\to 1^-}\cot\frac{\pi}{4}(1-x)=+\infty$; $\lim_{x\to 1^-}\sqrt[3]{\cot\frac{\pi}{4}(1-x)}=+\infty$

x	-1	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

f continue et strictement croissante sur $[-1\,,1[$ donc f réalise une bijection de $[-1\,,1[$ sur $f([-1\,,1[)=\left[f(-1);\lim_{x\to 1^-}f(x)\right[=[0;+\infty[$.

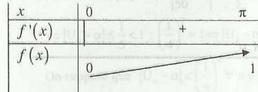
Exercice N° 16 : 1) On a : $x\mapsto\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ continue sur IR en particulier sur $[0\,,\pi]$; $0\le x\le\pi \Leftrightarrow 0<\frac{x}{2}\le\frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{x}{2}\ge 0$ donc $x\mapsto\sqrt{\sin\frac{x}{2}}$ est continue sur $[0\,,\pi]$. $x\mapsto\sin\frac{x}{2}$ est dérivable sur IR en particulier sur $]0\,,\pi]$; $\sin\frac{x}{2}>0\ \forall x\in\,]0\,,\pi]$ car $0<\frac{x}{2}\le\frac{\pi}{2}$ donc $x\mapsto\sqrt{\sin\frac{x}{2}}$ est dérivable sur $]0\,,\pi]$ et

$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sqrt{\sin\frac{x}{2}}}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{4\sqrt{\sin\frac{x}{2}}}$, $\forall x\in\,]0\,,\pi]$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\sin\frac{x}{2}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{x}{2}}}$.

$=\frac{1}{2}\times(+\infty)=+\infty\Rightarrow$ f n'est pas dérivable à droite en 0 .Conclusion:f est dérivable sur $]0\,,\pi[$ .2)

$f'(x)=\frac{\cos\frac{x}{2}}{4\sqrt{\sin\frac{x}{2}}}$; $0<x\le\pi\Leftrightarrow 0<\frac{x}{2}\le\frac{\pi}{2}$,alors $\cos\frac{x}{2}\ge 0$ et par suite $f'(x)\ge 0\quad\forall x\in\,]0\,,\pi]$

$x\mapsto\sin x$ est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Donc h est dérivable sur $]-1;1[$ et $h'(x)=\cos g(x)\times g'(x)\ \forall x\in\,]-1;1[$.



x	0	π
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	1

f est continue strictement croissante sur $[0,\pi]$ donc f réalise une bijection de $[0\,,\pi]$ sur $f([0\,,\pi])=J=[0,1]$.

3) $f^{-1}(1)=\pi$, $f^{-1}(0)=0$, $f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\alpha\Leftrightarrow f(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\alpha\in[0\,,\pi]\Leftrightarrow\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et

$\frac{\alpha}{2}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$ et $\frac{\alpha}{2}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ alors $\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{6}$ d'où $\alpha=\frac{\pi}{3}\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{3}$

4) f est dérivable sur $]0\,,\pi[$ et $f'(x)\ne 0\ \ \forall x\in\,]0\,,\pi[$ Donc f^{-1} est dérivable sur $f(]0\,,\pi[)=]0\,;1[$ et $\forall x\in\,]0\,;1[$; $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Exercice N°17 : 1)a) $f'(x)=2\sin 2x\ge 0\ \ \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ car $0\le x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0\le 2x\le\pi$ donc $\sin 2x\ge 0$. f est continue et strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc elle réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $f\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)=[-1;1]$. b) f est strictement croissante et dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et

$f'(x)\ne 0\ \ \forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow f^{-1}=g$ est dérivable sur $f\left(\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)=]-1;1[$, $g'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. On pose

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow -\cos 2y=x$ avec $x\in\,]-1;1[$ et $y\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. $g'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{2\sin 2y}$. Or

$\sin^2 2y+\cos^2 2y=1\Leftrightarrow\sin^2 2y=1-\cos^2 2y$. $|\sin 2y|=\sqrt{1-\cos^2 2y}$ or $2y>0$ pour tout $y\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc

$\sin 2y=\sqrt{1-\cos^2 2y}=\sqrt{1-x^2}$. Donc pour tout $x\in\,]-1;1[$; $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. 2) a) g est dérivable sur $]-1;1[$; pour tout $x\in\,]-1;1[$; $g(x)\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Pour $x\in\,]-1;1[$; $g(x)\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$; $\cos g(x)>0$ et

on a $\forall\ x\in\left]-1;1\right[$; $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\geq 0$. Donc $h'(x)\geq 0\ \forall x\in\left]-1;1\right[$ et par suite h est strictement croissante sur $\left]-1;1\right[$ donc h est strictement croissante sur $[-1;1]$

b) h est continue strictement croissante sur $[0;1]$; donc $h([0;1])=[h(0);h(1)]=[\sin g(0);\sin g(1)]$. Soit

$g(0)=\alpha\Leftrightarrow f(\alpha)=0\Leftrightarrow\cos 2\alpha=0$. Or $0\leq 2\alpha\leq\pi\Rightarrow 2\alpha=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$. Soit

$g(1)=\beta\Leftrightarrow f(\beta)=1\Leftrightarrow-\cos 2\beta=1$ et $0\leq 2\beta\leq\pi\Rightarrow 2\beta=\pi\Leftrightarrow\beta=\frac{\pi}{2}$;

$\sin g(0)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin g(1)=\sin\frac{\pi}{2}=1$. Donc $[h(0);h(1)]=\left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]$.

3) a) On a $U_0=0$; $0\leq U_0\leq 1$. On suppose que $0\leq U_n\leq 1\ \forall n\in IN$ et on montre que $0\leq U_{n+1}\leq 1$. D'après l'hypothèse de récurrence $0\leq U_n\leq 1\ \forall n\in IN$; h est croissante sur $[0;1]$ donc $h(0)\leq h(U_n)\leq h(1)$ $\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\leq U_{n+1}\leq 1$; $0\leq U_{n+1}\leq 1$ car $0\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$. Enfin d'après le principe de récurrence $0\leq U_n\leq 1\ \forall n\in IN$

b) $h(x)=\sin g(x)$ avec $g(x)\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\ \forall\ x\in[-1;1]$ donc $\sin g(x)\geq 0$; $\sin g(x)=\sqrt{1-\cos^2 g(x)}$

$=\sqrt{1-\frac{1-\cos 2g(x)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos 2g(x)}{2}}=\sqrt{\frac{1+f\left(f^{-1}(x)\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+x}{2}}\quad\forall\ x\in[-1;1]$

c) Pour $n=0$, On a $U_0=0$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2^{0+1}}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$. Supposons que $U_n=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ et montrons que $U_{n+1}=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$. $U_{n+1}=h(U_n)=\sqrt{\frac{1+U_n}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\left(2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right)}{2}}=\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$

$=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right|=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ car $0<\frac{\pi}{2^{n+2}}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}\geq 0$. Donc d'après le principe de récurrence $U_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}\ \ \forall\ n\in IN$. $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)=\cos 0=1$.

Exercice N° 18 1)a) f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et on a

2) $f'(x)=\frac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}}>0$

x	0		+∞
f'(x)		+	
f(x)	−∞	↗	4

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}5-\frac{x\sqrt{1+\left(\frac{3}{x^2}\right)}}{x}=4$; $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}5-\frac{x\sqrt{x^2+3}}{x}=5-\frac{3}{0^+}=-\infty$. On a f est continue et Strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$ donc elle réalise une bijection de $\left]0,+\infty\right[$ sur $\left]-\infty,4\right[$

b) $f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow x=f(y)$ où $\left(x\in\left]-\infty,-4\right[\text{ et } y\in\left]0,+\infty\right[\right)\Leftrightarrow 5-\frac{\sqrt{y^2+3}}{y}=x$

$\Leftrightarrow 5y-\sqrt{y^2+3}=xy\Leftrightarrow\sqrt{y^2+3}=5y-xy\Leftrightarrow\sqrt{y^2+3}=y(x-5)$ $(y>0\ ;\ x<5\Leftrightarrow 5-x>0)$ d'où

$y^2+3=y^2(5-x)^2\Leftrightarrow y^2+3=y^2\left(25-10x+x^2\right)\Leftrightarrow y^2\left(x^2-10x+24\right)=3$ $x^2-10x+24=0$;

$\Delta'=25-24=1\Leftrightarrow x'=4$ et $x''=6\Rightarrow\forall x\in\left]-\infty,4\right[;x^2-10x+24>0$

d'où $y^2=\frac{3}{x^2-10x+24}$; Or $y\in\left]0,+\infty\right[\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-10x+24}}$, d'où $f^{-1}(x)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-10x+24}}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=4\Rightarrow\Delta_1:y=4$ est un asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty\Rightarrow(yy'):x=0$ est un asymptote à C_f ; $C_{f^{-1}}=S_\Delta(C_f)$; $\Delta:y=x$; $\Delta_1':x=4$ est un asymptote à $C_{f^{-1}}$ et (xx') est un asymptote à $C_{f^{-1}}$

2) a) $\forall x\in\left[1,+\infty\right[;f'(x)\leq\frac{3}{2}$; $f'(x)=\frac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}}$; $f'(x)-\frac{3}{2}=\frac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}}-\frac{3}{2}=\frac{3\left(2-x^2\sqrt{x^2+3}\right)}{2x^2\sqrt{x^2+3}}$.

$x\geq 1\Leftrightarrow x^2\geq 1\Leftrightarrow x^2+3\geq 4\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3}\geq 2\Leftrightarrow x^2\sqrt{x^2+3}\geq 2\Leftrightarrow 2-x^2\sqrt{x^2+3}\leq 0$ d'où $f'(x)-\frac{3}{2}\leq 0;\forall x\in\left[1;+\infty\right[$

b) $(E):f(x)=2x$; $\varphi(x)=f(x)-2x\Leftrightarrow\varphi'(x)=f'(x)-2$ ou encore

$x\geq 1\Leftrightarrow x^2\geq 1\Leftrightarrow x^2+3\geq 4\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3}\geq 2\Leftrightarrow x^2\sqrt{x^2+3}\geq 2\Leftrightarrow\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+3}}\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(x)\leq\frac{3}{2}$

$x\in\left[1,+\infty\right[\Rightarrow f'(x)\leq\frac{3}{2}\Leftrightarrow f'(x)-2\leq-\frac{1}{2}<0$. Donc φ est continue strictement décroissante sur $\left[1,+\infty\right[$ donc elle réalise une bijection de $\left[1,+\infty\right[$ sur $\varphi\left(\left[1,+\infty\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x),\varphi(1)\right]$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-2x=-\infty$ et $\varphi(1)=1$ donc φ elle réalise une bijection de $\left[1,+\infty\right[$ sur $\left]-\infty,1\right]$. Or $0\in\left]-\infty,1\right]\Leftrightarrow 0$ admet un seul antécédent α par φ dans $\left[1,+\infty\right[$. Or

$\varphi(1)=1$; $\varphi(2)=-0.32$; $\varphi(1)\times\varphi(2)<0\Rightarrow\alpha\in\left]1,2\right[$ (théorème des valeurs intermédiaires) donc $f(x)=2x$ admet une seule solution $\alpha\in\left]1,2\right[$.

x	1		+∞
φ'(x)	1	↘	−∞
0			

c) On a φ est strictement décroissante sur $\left[1,+\infty\right[$

x	1		α		+∞
φ(x)		+	0	−	

3)a) $\begin{cases}1<u_0<\alpha\\ u_{n+1}=\frac{1}{2}f(u_n);n\in\mathbb{N}\end{cases}$ $u_0\in\left]1,\alpha\right[$ Vérifié. Supposons que $1<u_n<\alpha$ et montrons que $1<u_{n+1}<\alpha$

On a : $1<u_n<\alpha$; f est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[\Leftrightarrow f(1)<f(u_n)<f(\alpha)\Leftrightarrow 3<f(u_n)<2\alpha$

$\Leftrightarrow 1<\frac{3}{2}<\frac{1}{2}f(u_n)<\alpha\Leftrightarrow 1<u_{n+1}<\alpha$. Donc $\forall n\in\mathbb{N};1<u_n<\alpha$.

b) On a $u_n\in\left]1,\alpha\right[$; Or $\forall x\in\left]1,\alpha\right[;\varphi(x)>0\Rightarrow f(u_n)-2u_n>0\Leftrightarrow 2u_{n+1}-2u_n>0$ d'où (u_n) est croissante ; (u_n) est majorée par α. Donc (u_n) converge vers $l\in\left]1,\alpha\right[$ car $1<u_n<\alpha$ or $u_{n+1}=-\frac{1}{2}f(u_n)$; f est continue sur $\left]0,+\infty\right]\Rightarrow$ f est continue en l d'où $l=\frac{1}{2}f(l)\Leftrightarrow 2l=f(l)\Rightarrow l=\alpha$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\alpha$

4) $g(x)=f(\cos x)-5=\frac{-\sqrt{\cos^2 x+3}}{\cos x};x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ a) $g(x)=f(\cos x)-5$

$x\mapsto\cos x$ est dérivable et non nul sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$; $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; $\cos x>0$ donc $x\mapsto f\circ\cos x$ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ d'où g est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et

$g'(x)=-\sin x f'(\cos x)=\frac{-3\sin x}{\cos^2 x\sqrt{\cos^2 x+3}}$

b) On a $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; $\sin x>0$; et $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ $g'(x)<0$ donc g est strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $g\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-},g(0)\right]$ $g(0)=f(\cos 0)-5=f(1)-5=-2$;

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}g(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}f(\cos x)-5=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)-5=-\infty$ Donc est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $=\left]-\infty,-2\right]$.

c) On a $g'(x)=\frac{-3\sin x}{\cos^2 x\sqrt{\cos^2 x+3}}$; $\left.\begin{matrix}g'(0)=0\\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=0$ g est dérivable et $g'(x)\neq 0$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc g^{-1} est dérivable sur $g\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left]-\infty,-2\right[$ et on a $\left(g^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{g'(y)}=\frac{\cos^2 y\sqrt{\cos^2 y+3}}{-3\sin y}$

$y=g^{-1}(x)\Leftrightarrow x=g(y)\Leftrightarrow x=f(\cos y)-5\Leftrightarrow f(\cos y)=x+5$

$\cos y=f^{-1}(x+5)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(x+5)^2-10(x+5)+24}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-1}}$ et $\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}$ ca $\left(y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\sin y>0\right)$

$=\sqrt{1-\frac{3}{x^2-1}}=\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}$ d'où $g^{-1}(x)=\frac{\frac{3}{x^2-1}\sqrt{\frac{3}{x^2-1}+3}}{-3\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}}=\frac{-1}{x^2-1}\sqrt{\frac{3x^2}{x^2-4}}=\frac{\sqrt{3x^2}}{\left(1-x^2\right)\sqrt{\left(x^2-4\right)}}$

5) $\begin{cases}h(x)=g^{-1}(x)\ \text{ si } x\in\left]-\infty,-2\right]\\ h(x)=\sqrt{4-x^2}\ \text{ si } x\in\left]-2,0\right]\end{cases}$ a) $h(-2)=g^{-1}(-2)=0$; $\lim\limits_{x\to-2^+}h(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\sqrt{4-x^2}=0=g^{-1}(-2)$ donc g est continue en -2.

b) $g^{-1}(-2)=0\Leftrightarrow g(0)=-2$, on a $g'(0)=0\Rightarrow C_g$ admet au point $A(0,-2)$ une demi tangente parallèle à l'axe (xx') et $C_{g^{-1}}$ admet à gauche au point $A(-2,0)$ une demi tangente parallèle à l'axe $(yy')\Rightarrow g^{-1}$ n'est pas dérivable à gauche en -2 et h n'est pas dérivable à gauche en -2

$\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{h(x)-h(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{4-x^2}{(x+2)\sqrt{4-x^2}}=\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{2-x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4}{0^+}=+\infty$ et par suite h n'est pas dérivable à droite en -2.

c) si $x\in\left]-\infty,-2\right];h(x)=g^{-1}(x)$ et g est strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $g^{-1}=h$ est strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

si $x\in\left]-2,0\right]$ alors $h'(x)=-\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}\geq 0\Rightarrow$ h est strictement croissante sur $\left]-2,0\right]$

Exercice N° 19 :I- 1) Pour tout $x\in\left]1;+\infty\right[$ on a $-1\leq\cos\left(x^2-1\right)\leq 1\Leftrightarrow-2\leq\cos\left(x^2-1\right)-1\leq 0$;

$\frac{-2}{x-1}\leq\frac{\cos\left(x^2-1\right)-1}{x-1}\leq 0$ car $\frac{1}{x-1}>0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{x-1}\leq\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos\left(x^2-1\right)-1}{x-1}\leq 0$ donc

$0\leq\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos\left(x^2-1\right)-1}{x-1}\leq 0$ donc $0\leq\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos\left(x^2-1\right)-1}{x-1}\leq 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos\left(x^2-1\right)}{x-1}=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

2) $x\mapsto\cos\left(x^2-1\right)-1$ continue sur $\left]1;+\infty\right[$; $x\mapsto\frac{1}{x-1}$ continue sur $\left]1;+\infty\right[$ et $x-1\neq 0$.

Donc f est continue sur $\left]1;+\infty\right[$. $x\mapsto\frac{1-x^2}{x}$ fonction rationnelle continue sur IR^* en particulier sur $\left]0;1\right]$ et $\frac{1-x^2}{x}\geq 0\ \forall\ x\in\left]0;1\right]$ donc f est continue sur $\left]0;1\right]$.

Continuité en 1 : $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\cos\left(x^2-1\right)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}-\left(\frac{1-\cos\left(x^2-1\right)}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}-\left(\frac{1-\cos\left(x^2-1\right)}{x^2-1}\right)(x+1)$

or $\lim\limits_{x\to1^+} x+1=2$ et $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{1-\cos(x^2-1)}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1-\cos y}{y}=0$ et par suite $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=0=f(1)$ donc f est continue à droite en 1. et par suite f est continue sur $[1;+\infty[$ et f est continue sur $]0;1]$ donc f est continue sur $]0,+\infty[$.

3) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\dfrac{1-x^2}{x}}{\left(\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}\right)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-x^2}{x(x-1)\left(\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-(1+x)}{x\left(\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}\right)}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty$. C_f admet une demi-tangente verticale à gauche en $A(1;0)$ d'équation $\begin{cases}x=1\\y\ge0\end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\cos(x^2-1)-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1^+}-\left(\dfrac{1-\cos(x^2-1)}{(x^2-1)^2}\right)\dfrac{(x^2-1)^2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1^+}-\left(\dfrac{1-\cos(x^2-1)}{(x^2-1)^2}\right)(x+1)^2$ or $\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)^2=4$ et $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(1-\cos(x^2-1))}{(x^2-1)^2}=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{1-\cos z}{z^2}=\dfrac{1}{2}$. Donc $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\dfrac{1}{2}\times4=-2$. f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1)=-2$; C_f admet une demi-tangente à droite en $A(1;0)$ d'équation

$\begin{cases}y=-2(x-1)\\x\ge1\end{cases}$

4) a) $g(x)=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}$ $\forall\ x\in]0;1]$. $x\mapsto\dfrac{1-x^2}{x}$ fonction rationnelle dérivable sur $]0;1]$ et $\dfrac{1-x^2}{x}>0$ $\forall\ x\in]0,1[$. donc g est dérivable sur $]0,1[$. $g'(x)=\dfrac{\dfrac{-2x^2-(1-x^2)}{x^2}}{2\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}}=\dfrac{-x^2-1}{2x^2\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}}<0$; g est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$ donc elle réalise une bijection de $]0;1]$ sur $f(]0;1])=\left[g(1);\lim\limits_{x\to0^+}g(x)\right]=[0;+\infty[$

b) $g^{-1}:[0;+\infty[\to]0;1]$; $x\mapsto g^{-1}(x)$; $g^{-1}(x)=y\Leftrightarrow g(y)=x\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{1-y^2}{y}}=x$;

$\dfrac{1-y^2}{y}=x^2\Leftrightarrow-y^2-x^2y+1=0$; $\Delta=(-x^2)^2+4=x^4+4>0$; $y=\dfrac{-x^2+\sqrt{x^4+4}}{2}$ et

$y'=\dfrac{-x^2-\sqrt{x^4+4}}{2}<0$ or $y\in]0;1]\Rightarrow g^{-1}(x)=\dfrac{-x^2+\sqrt{x^4+4}}{2}$.

5) a) $U_n=\dfrac{n!}{2^n}$; $U_{n+1}-\dfrac{3}{2}U_n=\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}-\dfrac{3n!}{2^{n+1}}=\dfrac{(n+1)!-3n!}{2^{n+1}}=\dfrac{n!(n-2)}{2^{n+1}}\ge0$ car $n\ge2$ $n-2\ge0$; $n!>0$. et $2^{n+1}\ge0$. Donc $U_{n+1}\ge\dfrac{3}{2}U_n$ $\forall\ n\in I$.

b) $U_{n+1}\ge\dfrac{3}{2}U_n\ge U_n$ car $\dfrac{3}{2}\ge1$ et $U_n\ge0\Rightarrow\dfrac{3}{2}U_n\ge U_n$. Donc U est croissante sur I . Montrons que $U_n\ge\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2}U_2$. Pour $n=2$; $\dfrac{2!}{2^2}=\dfrac{1}{2}$; $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2-2}U_2=\dfrac{1}{2}$ donc $U_2\ge\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2-2}U_2$ vrai pour $n=2$ .On suppose que $U_n\ge\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2}U_2$ et on montre que $\dfrac{3}{2}U_n\ge\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}U_2$ $\forall\ n\in I$. On a d'après l'hypothèse de récurrence $U_n\ge\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2}U_2$ pour $n\in I$ donc $\dfrac{3}{2}U_n\ge\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}U_2$ or d'après (5 / a) $U_{n+1}\ge\left(\dfrac{3}{2}\right)U_n\ge\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}U_2$ en fin d'après le principe de récurrence pour tout $n\in I$ $U_n\ge\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2}U_2$.

c) On a : $U_n\ge\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2}U_2$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2}U_2=+\infty$ car $\dfrac{3}{2}>1$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=+\infty$.

6) a) On a d'après (4 / a) g réalise une bijection de $]0;1]$ sur $[0;+\infty[$ et comme $U_n\in[0;+\infty[$ donc il existe un unique $\alpha_n\in]0;1]$ tel que $g(\alpha_n)=U_n$ pour tout $n\in I$.

b) On a $U_{n+1}\ge U_n$ pour tout $n\in I$. Donc $g(\alpha_{n+1})\ge g(\alpha_n)$ or g^{-1} décroissante sur $[0;+\infty[$ donc $g^{-1}(g(\alpha_{n+1}))\le g^{-1}g(\alpha_n)$; $\alpha_{n+1}\le\alpha_n$ et par suite $(\alpha_n)_{n\in I}$ est décroissante .

c) $(\alpha_n)_{n\in I}$ décroissante et majorée par 0 donc elle est convergente.

$g^{-1}(U_n)=\alpha_n\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}g^{-1}(U_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g^{-1}(x)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}g^{-1}(U_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$.

Exercice N° 20 $g'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x}-\dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}}}{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2}=\dfrac{-1}{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^3}<0$;

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		-	‖		‖	-	
$g(x)$	-2	↘	$-\infty$ ‖		‖ $+\infty$	↘	0

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}}-1=-2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}}-1=0$; $\lim\limits_{x\to(-2)^-}g(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=+\infty$.

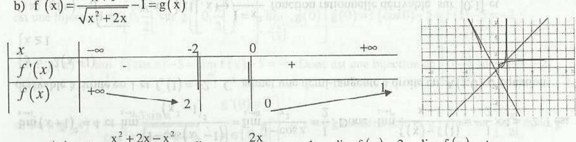
x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g(x)$		-	‖		‖	+	

2) a) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x}-1=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x(x+2)}{x\sqrt{x^2+2x}}-1=+\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0^+ .

$\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x(x+2)}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}-1=-\infty$ donc f n'est pas dérivable à gauche en −2

C_f admet au point d'abscisse 0 une demi tangente verticale dirigée vers le haut et admet au point d'abscisse -2 une demi tangente verticale dirigée vers le bas.

b) $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}-1=g(x)$



x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖		‖	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2 ‖		‖ 0	↗	1

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1\right)}=1$; $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(-2x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)+1=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x-x^2}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1\right)}+1=0$ donc $\Delta:y=-2x-1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1\Leftrightarrow y=1$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$.

3) a) h est continue strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc elle réalise une bijection de IR_+ sur

b) soit $x\in[0;1[$ et $y\in[0;+\infty[$; $h^{-1}(x)=y\Leftrightarrow h(y)=x\Leftrightarrow\sqrt{y^2+2y}-y=x$ $\Leftrightarrow y^2+2y=(x+y)^2$

$\Leftrightarrow y(2-2x)=x^2\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2}{2(1-x)}$ donc $\forall\ x\in[0;1[$; $h^{-1}(x)=\dfrac{x^2}{2(1-x^2)}$

$C'=S_{\Delta:y=x}(C)$ (Construction de la courbe $\zeta_{h^{-1}}$) .

4) a) $h(x)=f(x)$ sur $[0;+\infty[$; h est une bijection de IR_+ sur $[0;1[$. $\Leftrightarrow\dfrac{1}{n}\in[0;1[$ $\forall\ n\ge2\Rightarrow\dfrac{1}{n}$ admet un seul antécédent α_n par $h=f$ sur $[0;+\infty[$. Donc l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet une unique solution $\alpha_n\in IR_-$.

b) $f(\alpha_n)=\dfrac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1})=\dfrac{1}{n+1}\Rightarrow f(\alpha_{n+1})<f(\alpha_n)$ et f est croissante sur $IR_+\Rightarrow\alpha_{n+1}<\alpha_n\Rightarrow(\alpha_n)$ est décroissante. $\alpha_n\ge0$ $\forall\ n$; α_n est décroissante. Donc α_n est convergente

c) $f(\alpha_n)=\dfrac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}f(\alpha_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)=\ell$ f est continue en ℓ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}f(\alpha_n)=f(\ell)$ et par suite $f(\ell)=0$. $f(\ell)=0\Leftrightarrow\ell=f^{-1}(0)=0$ car $f(0)=0$.

B) 1) $f'(x)=g(x)>0$ $\forall\ x\in[1;+\infty[\Rightarrow|f'(x)|=g(x)$; $x\ge1\Leftrightarrow g(x)\le g(1)$ car g est décroissante ; $g(x)\le\dfrac{2}{\sqrt3}-1=0.15\Rightarrow g(x)\le\dfrac{1}{5}$ d'où $|f'(x)|\le\dfrac{1}{5}$ $\forall\ x\in[1;+\infty[$.

2) a) $U_0=\dfrac{9}{10}\Rightarrow\dfrac{3}{5}<U_0<1$ vrai. Soit $n\in IN$ supposons que $\dfrac{3}{5}<U_n<1$ et montrons que $\dfrac{3}{5}<U_{n+1}<1$.

$\dfrac{3}{5}<U_n<1\Leftrightarrow\dfrac{6}{5}<2U_n<2$ f est croissante $\Rightarrow f\left(\dfrac{6}{5}\right)<f(2U_n)<f(2)$ Or $f\left(\dfrac{6}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{96}}{5}>\dfrac{3}{5}$

et $f(2)=2(\sqrt2-1)<1$ donc $\dfrac{3}{5}<U_{n+1}<1$ enfin $\forall\ n\in IN$; $\dfrac{3}{5}<U_n<1$

b) f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et $|f'(x)|\le\dfrac{1}{5}$; $U_n\in\left]\dfrac{6}{5};1\right[\Leftrightarrow2U_n\in\left]\dfrac{6}{5};2\right[\subset[1;+\infty[$

$\Rightarrow a=2U_n$ et $b=\dfrac{8}{5}\in[1;+\infty[$ d'après le corollaire des inégalités des accroissements finis ,

$\left|f(2U_n)-f\left(\dfrac{8}{5}\right)\right|\le\dfrac{1}{5}\left|2U_n-\dfrac{8}{5}\right|$; On a $f(2U_n)=U_{n+1}$ et $f\left(\dfrac{8}{5}\right)=\dfrac{4}{5}$ $\Rightarrow\left|U_{n+1}-\dfrac{4}{5}\right|\le\dfrac{2}{5}\left|U_n-\dfrac{4}{5}\right|$.

c) $\left|U_0-\dfrac{4}{5}\right|=\left|\dfrac{9}{10}-\dfrac{8}{10}\right|=\dfrac{1}{10}\le\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{2}{5}\right)^0$ Vrai.Soit $n\in IN$ supposons que $\left|U_n-\dfrac{4}{5}\right|\le\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ et montrons que $\left|U_{n+1}-\dfrac{4}{5}\right|\le\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}$. $\left|U_n-\dfrac{4}{5}\right|\le\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ $\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}\left|U_n-\dfrac{4}{5}\right|\le\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}$ Or $\left|U_{n+1}-\dfrac{4}{5}\right|\le\dfrac{2}{5}\left|U_n-\dfrac{4}{5}\right|$

$\Rightarrow\left|U_{n+1}-\dfrac{4}{5}\right|\le\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}$ donc $\forall\ n\in IN$; $\left|U_{n+1}-\dfrac{4}{5}\right|\le\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$

d) $\left|U_n-\frac{4}{5}\right|\le\frac{1}{10}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{10}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0\Rightarrow U_n$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty}U_n=\frac{4}{5}$

C) 1) $x\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right]$; $\varphi(x)=\sqrt{\left(\frac{1}{\sin 2x}-1\right)^2+\frac{2}{\sin 2x}-2+1-\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 2x}}$

$=\sqrt{\frac{1}{\sin^2 2x}+1-\frac{2}{\sin 2x}+\frac{2}{\sin 2x}-2+1}=\sqrt{\frac{1-\sin^2 2x}{\sin^2 2x}+1}=\sqrt{\cot g^2 2x+1}=1+\cot g 2x$ car

$\cot g 2x\ge 0\ \forall\ x\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right]$.

2) $\varphi'(x)=-2\left(1+\cot g^2 2x\right)$ pour $x\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right]$; φ est continue strictement décroissante sur $\left]0;\frac{\pi}{4}\right]$ donc elle réalise une bijection de $\left]0;\frac{\pi}{4}\right]$ sur $\varphi\left(\left]0;\frac{\pi}{4}\right]\right)=\left[\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right);\lim_{x\to0^+}\varphi(x)\right[=[1;+\infty[$

3) φ est dérivable et strictement décroissante sur $\left]0;\frac{\pi}{4}\right]$ et pour $x\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right]$ $\varphi'(x)\ne0$ donc φ^{-1} est dérivable sur $[1;+\infty[$; $\left(\varphi^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{\varphi'(y)}$; $y=\varphi^{-1}(x)\Leftrightarrow\varphi(y)=x$

$\Leftrightarrow 1+\cot 2y=x\Leftrightarrow\cot 2y=x-1$. $\left(\varphi^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{-2\left(1+\cot^2 2y\right)}=\frac{1}{-2\left(1+(x-1)^2\right)}\ \forall\ x\in K=[1,+\infty[$.

4) $\psi'(x)=\left(\varphi^{-1}\right)'(x)-\left(\varphi^{-1}\right)'(2-x)=\frac{-1}{2\left(1+(x-1)^2\right)}+\frac{1}{2\left(1+(1-x)^2\right)}=0.$

$\psi(x)$ est constante pour tout $x\in k$. $\psi(x)=\psi(1)=2\varphi^{-1}(1)=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ car $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.

5) a) On a $n\le k\le 2n\Rightarrow\frac{1}{2n}\le\frac{1}{k}\le\frac{1}{n}\Leftrightarrow\frac{1}{2n}+1\le\frac{1}{k}+1\le\frac{1}{n}+1$ et $\frac{1}{2n}+1>1$ et φ^{-1} est décroissante sur $[1;+\infty[$

donc $\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2n}+1\right)\ge\varphi^{-1}\left(\frac{1}{k}+1\right)\ge\varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}+1\right)\ \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2n}+1\right)\ge\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\varphi^{-1}\left(\frac{1}{k}+1\right)\ge\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}+1\right)$

$\left(\frac{2n+1-n}{n+1}\right)\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2n}+1\right)\ge V_n\ge\left(\frac{2n+1-n}{n+1}\right)\varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}+1\right)\Leftrightarrow\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2n}+1\right)\ge V_n\ge\varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}+1\right)$

b) $\lim_{n\to+\infty}\varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}+1\right)=\varphi^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}=\lim_{n\to+\infty}\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2n}+1\right)$ donc $\lim_{n\to+\infty}V_n=\frac{\pi}{4}$.

c) $\varphi^{-1}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{\pi}{2}-\varphi^{-1}\left(2-\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)=\frac{\pi}{2}-\varphi^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)$; $W_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\varphi^{-1}\left(1-\frac{1}{k}\right)$

$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)=\frac{\pi}{2}-V_n$ Donc $\lim_{n\to+\infty}W_n=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

Exercice N° 21 : 1) a) $x\mapsto\tan^2 x$ continue sur $IR/\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ en particulier sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan^2 x\ge0$ pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc f est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ $x\mapsto tg^2x$ dérivable sur $IR/\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ en particulier sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ $\tan^2 x>0$ pour tout $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc f et dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

b) $f'(x)=\frac{2\left(1+\tan^2 x\right)\tan x}{3\times\sqrt[3]{\left(\tan^2 x\right)^{3-1}}}=\frac{2\left(1+\tan^2 x\right)\tan x}{3\times\sqrt[3]{\left(\tan^2 x\right)^2}}=\frac{2\left(1+\tan^2 x\right)\tan x}{3\times\sqrt[3]{\left(\tan^3 x\right)}\sqrt[3]{\left(\tan^2 x\right)}}=\frac{2\left(1+\tan^2 x\right)}{3\times\sqrt[3]{(\tan x)}}$

$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[3]{\tan^2 x}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x}{x}\frac{\sqrt[3]{\tan^2 x}}{\sqrt[3]{\tan^3 x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x}{x}\sqrt[3]{\frac{1}{\tan x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x}{x}\frac{1}{\sqrt[3]{\tan x}}=1\times\frac{1}{0^+}=+\infty$

donc f n'est pas dérivable à droite en 0, C_f admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point $A(0;0)$

2) a) $f'(x)=\frac{2\left(1+\tan^2 x\right)}{3\times\sqrt[3]{\tan x}}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

f est continue et strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc f réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $f\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right)=[0;+\infty[$.

b) C_f admet $\Delta : x=\frac{\pi}{2}$ comme asymptote. $C_{f^{-1}}=S_{(y=x)}\left(C_f\right)$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt[3]{\tan^2\frac{\pi}{4}}=\sqrt[3]{1}=1$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{\tan^2\frac{\pi}{3}}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt[3]{3}$

c) $2>\sqrt[3]{3}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $f^{-1}(2)>f^{-1}\left(\sqrt[3]{3}\right)\Leftrightarrow f^{-1}(2)\ge\frac{\pi}{3}$ Or $\frac{\pi}{3}>1\Rightarrow f^{-1}(2)>1$

3) a) f est dérivable et strictement croissante sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x)\ne0$ pour tout $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)=]0;+\infty[$ et $\forall\ x\in]0;+\infty[$; $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$ on pose

$f^{-1}(x)=y$; $x\in]0;+\infty[$ et $y\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $f(y)=x\Leftrightarrow\sqrt[3]{\tan^2 y}=x\Leftrightarrow\tan^2 y=x^3\Leftrightarrow\tan y=\sqrt[2]{x^3}$;

$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{3\times\sqrt[3]{\tan y}}{2\left(1+\tan^2 y\right)}=\frac{3\times\sqrt[3]{\sqrt[2]{x^3}}}{2\left(1+x^3\right)}=\frac{3\times\sqrt[6]{x^3}}{2\left(1+x^3\right)}=\frac{3\times\sqrt[2]{\sqrt[3]{x^3}}}{2\left(1+x^3\right)}=\frac{3\sqrt{x}}{2\left(1+x^3\right)}$

b) $\lim_{x\to0^+}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(0)}{x-0}=0$ car $C_{f^{-1}}$ admet une demi tangente à droite en 0.

<u>2ième méthode :</u> $\lim_{x\to0^+}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(0)}{x-0}=\lim_{y\to0^+}\frac{1}{\frac{f(y)-f(1)}{y-0}}=\frac{1}{+\infty}=0$ D'où f^{-1} est dérivable sur $[0;+\infty[$.

II) 1) f^{-1} est définie sur $[0;+\infty[$, donc $x\mapsto\frac{f^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1}$ est définie sur $[0;+\infty[/\{1\}$;

$H(1)=0\Rightarrow D_H=[0;+\infty[$.

2) a) f^{-1} est continue sur $[0;+\infty[$ donc $x\mapsto\frac{f^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1}$ est continue sur $[0;+\infty[/\{1\}$

$\lim_{x\to1}H(x)=\lim_{x\to1}\frac{f^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1}=\left(f^{-1}\right)'(1)=\frac{3}{4}$ car f^{-1} est dérivable en 1.

$\lim_{x\to1}H(x)=\frac{3}{4}$ Or $H(1)=a$ d'où H est continue en 1 si et seulement si $a=\frac{3}{4}$.

Conclusion : H est continue sur $[0;+\infty[$ si et seulement si $a=\frac{3}{4}$.

<u>Exercice N° 22</u> On pose $\alpha=\sqrt[3]{a}$; $\beta=\sqrt[3]{b}$ alors $\alpha^3=a$ et $\beta^3=b$

$\sqrt{a+\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b}}+\sqrt{b+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2}}=\sqrt{\alpha^3+\alpha^2\beta}+\sqrt{\beta^3+\alpha\beta^2}=\sqrt{\alpha^2(\alpha+\beta)}+\sqrt{\beta^2(\alpha+\beta)}$

$=\alpha\sqrt{\alpha+\beta}+\beta\sqrt{\alpha+\beta}=(\alpha+\beta)\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{(\alpha+\beta)^3}=\sqrt{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$

<u>Exercice N° 23 :</u>

$\left(\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-k}\left(\sqrt[n]{y}\right)^k=\left(\sqrt[n]{x}\right)^n+\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-k}\left(\sqrt[n]{y}\right)^k+\left(\sqrt[n]{x}\right)^n+\left(\sqrt[n]{y}\right)^n$

$=x+\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-k}\left(\sqrt[n]{y}\right)^k+y\ge x+y$

d'où $\left(\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}\right)^n\ge x+y$ et comme $f:x\mapsto\sqrt[n]{x}$ est une fonction croissante sur $[0,+\infty[$ donc

$\sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}\right)^n}\ge\sqrt[n]{x+y}\Leftrightarrow\sqrt[n]{x+y}\le\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}$.

****

SOLUTION DES EXERCICES RELATIFS AU CHAPITRE

****

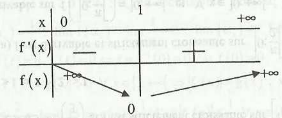
Exercice N° 1 : 1) a) ; 2) c) ; 3) b) ; 4) c) ; 5) b); 6) b 7) i) a ii) b iii) b

Exercice N° 2 : 1) Vrai ; 2) Vrai ; 3) Faux ; 4) Faux

Exercice N° 3 : 1) a) $f(1)=0$; Δ est la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2 ; la tangente Δ a pour coefficient directeur $f(2)$ qui est égale à sa pente.

$A(1;-3)$ et $B(2;3)$ sont deux points de Δ ; $f'(2)=\frac{-3-3}{1-2}=6$

b)



2) On a : $f(1)=0$; Donc si F une primitive de f sur IR alors $F'(1)=f(1)=0$; la courbe ξ_F de la fonction F admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 ; Or la courbe 3 est la seule qui admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 et par suite la courbe 3 est celle de la primitive de f sur IR

Exercice N° 4 : Supposons que Γ est la courbe de f et ζ la courbe de F. on a Γ est au dessus de $\Delta : y=0$ alors $f(x)\ge0$; $\forall x\in IR$ et par suite F est croissante sur IR car $F'(x)=f(x)$ ceci est impossible car d'après ζ ;F est croissante sur IR_+ et décroissante sur IR_-

Conclusion ; ξ est la courbe de f et Γ est celle de F.

Exercice N° 5 : 1) f est une fonction polynôme sur IR donc f_1 est continue et par suite elle admet au moins une primitive F_1 sur IR. $f_1(x)=x^3-\frac{5}{2}x^2+x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$.

2) $f_2(x)=\frac{x}{\left(x^2-1\right)}$ f_2 une fonction rationnelle continue sur $IR/\{-1;1\}$ donc f_2 admet au moins une primitive F_2 sur $IR/\{-1;1\}$. On pose $U(x)=x^2-1\Leftrightarrow U'(x)=2x$ f_2 sous la forme :

$\frac{1}{2}\frac{U'}{U^2}\Rightarrow F_2(x)=-\frac{1}{2}\frac{1}{U(x)}+k=\frac{-1}{2\left(x^2-1\right)}+k$; $k\in IR$

3) $f_3(x)=(3x-1)^5$; f_3 une fonction continue sur IR donc f_3 admet au moins une primitive F_3 sur IR.

On pose $U(x)=3x-1\Leftrightarrow U'(x)=3$; $f_3(x)=\frac{1}{3}U'(x)\left(U(x)\right)^5$; $F_3(x)=\frac{1}{18}\left(U(x)\right)^6+k$

$=\frac{1}{18}(3x-1)^6+k$; $k\in IR$

4) $f_4(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}$, f_4 une fonction continue sur $IR/\{-1\}$ donc f_3 admet au moins une primitive F_3 sur $IR/\{-1\}$.

On pose $U(x)=x+1 \Leftrightarrow U'(x)=1$; $f_4(x)=2(x+1)^{-3}=2U'(x)(U(x))^{-3}$; $F_4(x)=-(U(x))^{-2}+k$

5) f_5 continue sur IR ; F_5 une primitive de f_5 continue sur IR.

$f_5(x)=x^2(1+x)^6$. On a $(1+x)^2=x^2+2x+1$ donc $x^2=(1+x)^2-2x-1$; $x^2=(1+x)^2-2(x+1)+1$ d'où

$f_5(x)=\left[(1+x)^2-2(x+1)+1\right](1+x)^6=(1+x)^8-2(x+1)^7+(1+x)^6$;

$F_5(x)=\frac{1}{9}(1+x)^9-\frac{2}{8}(x+1)^8+\frac{1}{7}(1+x)^7+k$; $k\in IR$

6) $f_6(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{5x+4}}$; f_6 est continue sur $\left]-\frac{4}{5};+\infty\right[$; F_6 une primitive de f_6 sur $\left]-\frac{4}{5};+\infty\right[$. On pose

$U(x)=5x+4$; $U'(x)=5$; $f_6(x)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$; $F_6(x)=\frac{1}{15}\left(2\sqrt{U(x)}\right)+k=\frac{2}{15}\sqrt{5x+4}+k$; $k\in\mathbb{R}$

7) $f_7(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+8}}+5x+1$; f_7 est continue sur IR ; F_7 une primitive de f_7 sur IR.

$f_7(x)=g(x)+h(x)$ avec $g(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+8}}$ et $h(x)=5x+1$. On pose $U(x)=x^2+8$; $U'(x)=2x$.

$g(x)=3\dfrac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}}$; $F_7(x)=3\sqrt{x^2+8}+\frac{5}{2}x^2+x+k$; $k\in IR$

8) $f_8(x)=\dfrac{x-5}{(x+1)^3}$; f_8 est continue sur $IR/\{-1\}$; F_8 est une primitive de f_8 sur $IR/\{-1\}$;

$f_8(x)=\dfrac{x+1-6}{(x+1)^3}=\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{6}{(x+1)^3}=(x+1)^{-2}-6(x+1)^{-3}$; $F_8(x)=-(x+1)^{-1}+3(x+1)^{-2}+k$; $k\in IR$

9) $f_9(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$; f_9 est continue sur $IR/\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$; F_9 est une primitive de f_9 sur $IR/\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$;

On pose $U(x)=x$ et $V(x)=\sin x$; $f_9(x)=\dfrac{U'V-V'U}{V^2}$; $F_9(x)=\dfrac{U(x)}{V(x)}+k=\dfrac{x}{\sin x}+k$; $k\in IR$

<u>Exercice N° 6 :</u> 1) $f(x)=3x+1-5x^{-3}$; F une primitive de f sur $]0;+\infty[$; $F(x)=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{5}{2}x^{-2}+k$; Or $F(1)=-2$. Donc $\frac{3}{2}+1+\frac{5}{2}+k=-2 \Leftrightarrow k=-7$ et par suite $F(x)=\frac{3}{2}x^2+x+\dfrac{5}{2x^2}-7$

2) $f(x)=\cos x\sin^n x$. On pose $U(x)=\sin x$; $U'(x)=\cos x$; $f(x)=U'(x)(U(x))^n$ d'où F une primitive de f sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. $F(x)=\frac{1}{n+1}(U(x))^{n+1}+k=\frac{1}{n+1}\sin^n x+k$ Or $F(0)=1\Leftrightarrow k=1$; $F(x)=\frac{1}{n+1}\sin^n x+1$

3) $f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$; On pose $U(x)=\frac{1}{x}$; $U'(x)=-\frac{1}{x^2}$ et $V(x)=\cos x$; $V'(x)=-\sin x$;

$f(x)=U'(x)V'(U(x))$; F une primitive de f sur $]-\infty;0[$. $F(x)=V\circ U(x)+k=\cos\frac{1}{x}+k$ Or $F\left(-\frac{1}{\pi}\right)=0\Leftrightarrow k=1$; $F(x)=\cos\frac{1}{x}+1$

4) $f(x)=tg^2x=(1+tg^2x)-1$; F une primitive de f sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. $F(x)=tgx-x+k$ Or $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=2 \Leftrightarrow k=1+\frac{\pi}{4}$; $F(x)=\tan x-x+1+\frac{\pi}{4}$

5) $f(x)=\tan^2 4x=\frac{1}{4}\left[4(\tan^2 4x)+4\right]-1$; On pose $U(x)=\tan 4x$; $U'(x)=4(1+\tan^2 4x)$;

$f(x)=\frac{1}{4}U'(x)-1$; F une primitive de f sur $\left]-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right[$. $F(x)=\frac{1}{4}\tan 4x-x+k$; $k\in\mathbb{R}$ Or $F(0)=\pi$;

$\Leftrightarrow k=\pi$; $F(x)=\frac{1}{4}\tan 4x-x$

<u>Exercice N° 7 :</u> 1) a) $\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$; $f(x)=\dfrac{1}{1-\sin x}=\dfrac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\dfrac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}=\dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ $\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$; On pose $g(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ et $h(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; G une primitive de g sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$; $G(x)=\tan x$ et H une primitive de h sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$; $H(x)=-\dfrac{1}{\cos x}$ d'où une primitive de la fonction f est F définie par : $F(x)=G(x)+H(x)=\tan x-\dfrac{1}{\cos x}$

2) a) $F'(x)=f(x)=\dfrac{1}{1-\sin x}>0$ $\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc F est strictement croissante sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Supposons que F est périodique donc il existe un réel $T>0$ tel que $F(x+T)=F(x)$ alors F n'est pas bijective ce qui est absurde car F est strictement croissante sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

<u>Exercice N°8 :</u> 1) a) $\cos^4 x=\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\frac{1}{16}\left(e^{i4x}+4e^{i3x}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}\right)$

$=\frac{1}{16}\left[\left(e^{4ix}+e^{-i4x}\right)+4\left(e^{2ix}+e^{-i2x}\right)+6\right]=\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}$ donc $f(x)=\cos 4x+4\cos 2x+3$

b) f est une fonction continue sur IR donc elle admet au moins une primitive F sur IR

$F(x)=\frac{1}{4}\sin 4x+2\sin 2x+3x$

2) $\sin^4 x=\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4=\frac{1}{16}\left(e^{i4x}-4e^{i3x}\times e^{-ix}+6e^{2ix}\times e^{-2ix}-4e^{ix}\times e^{-3ix}+e^{-4ix}\right)$

$=\frac{1}{16}\left[\left(e^{4ix}+e^{-i4x}\right)-4\left(e^{2ix}+e^{-i2x}\right)+6\right]=\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}$ Donc $g(x)=\cos 4x-4\cos 2x+3$; g une fonction continue sur IR donc elle admet une primitive G sur IR $G(x)=\frac{1}{4}\sin 4x-2\sin 2x+3x$

3) a) $\forall x\in IR$; $f(x)+g(x)=8(\cos^4 x+\sin^4 x)=8\left[(\cos^2 x)^2+(\sin^2 x)^2\right]$

$=8\left[(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\cos^2 x\sin^2 x\right]=8-16\cos^2 x\sin^2 x$

b) $\forall x\in IR$; $h(x)=\frac{1}{16}(8-f(x)-g(x))$; donc une primitive de h sur IR est

$H(x)=\frac{1}{16}(8x-F(x)-G(x))=\frac{1}{16}\left(8x-\frac{1}{4}\sin 4x-2\sin 2x-3x-\frac{1}{4}\sin 4x+2\sin 2x-3x\right)$

$=\frac{1}{16}\left(2x-\frac{1}{2}\sin 4x\right)$

<u>Exercice N° 9 :</u> 1) a) $x\mapsto x+3$ fonction polynôme dérivable sur $]-3;+\infty[$ et $x+3>0$ $\forall x\in]-3;+\infty[$ donc $x\mapsto\sqrt{x+3}$ est dérivable sur $]-3;+\infty[$ et par suite g est dérivable sur $]-3;+\infty[$;

$g'(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{x+3}{2\sqrt{x+3}}=\dfrac{3\sqrt{x+3}}{2}$

b) f est continue sur $]-3;+\infty[$; donc f admet une primitive F sur $]-3;+\infty[$

$\forall x\in]-3;+\infty[$; $\sqrt{x+3}=\frac{2}{3}g'(x)$ alors $F(x)=\frac{2}{3}g(x)=\frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3}$ est une primitive de f sur $]-3;+\infty[$.

2) a) $\forall x\in]-3;+\infty[$; $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{g(x)-g(-3)}{x+3}=\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{(x+3)\left(\sqrt{x+3}\right)}{x+3}=\lim\limits_{x\to(-3)^+}\sqrt{x+3}=0$ Donc g est dérivable à droite en -3 et $g_d'(-3)=0$

3) g est dérivable à droite en 0 donc $F=\frac{2}{3}g$ est dérivable à droite en -3 et $F_d'(-3)=\frac{2}{3}g'(-3)=0=f(-3)$ et comme On a F une primitive de f sur $]-3;+\infty[$ .alors F une primitive de f sur $[-3;+\infty[$

<u>Exercice N° 10 :</u>.1) Soit F une primitive de f sur $[-\alpha;\alpha]$; On pose $g(x)=F(x)-F(-x)$ g est dérivable sur $[-\alpha;\alpha]$; $g'(x)=F'(x)+F'(-x)=f(x)+f(-x)$ or f est impair $\Rightarrow f(-x)=-f(x)$ donc $g'(x)=0\Rightarrow g(x)=c$; $c\in IR$; $g(x)=g(0)=F(0)-F(-0)=0\Rightarrow F(x)=F(-x)$

$x\in[-\alpha;\alpha]$ alors $-x\in[-\alpha;\alpha]$ donc F est paire.

2) a) On pose $\varphi(x)=F(x)+F(-x)$ avec F une primitive de f telle que $F(0)=0$; φ est dérivable sur IR et $\varphi'(x)=F'(x)-F'(-x)=f(x)-f(-x)=0$ car f est paire ($f(-x)=f(x)$) donc

$\varphi(x)=\varphi(0)=F(0)+F(0)=0$ car $F(0)=0$ et par suite F est impaire.

b) Faux ; contre exemple ; $f(x)=x^2$; f est une fonction paire, $F(x)=\frac{1}{3}x^3+5$ est une primitive de f mais F n'est pas paire car $F(-x)\neq F(x)$

<u>Exercice N° 11 :</u> 1) $x\mapsto 3x^2+5$ est une fonction polynôme continue sur IR et $\forall x\in IR$; $3x^2+5>0$ donc $x\mapsto\sqrt{3x^2+5}$ est continue sur IR. $x\mapsto 6x^2+5$ est continue sur IR donc f est continue sur IR et par suite f admet des primitives sur IR.

2) Soit F une primitive de f sur IR ; Posons $F(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ avec $a\neq 0$ et $ax^2+bx+c>0$;

$F'(x)=\dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}=\dfrac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$; F une primitive de f sur IR ; $F'(x)=f(x)$

$\begin{cases}a=3\\ \frac{b}{2}=5\\ a=3\\ b=0\end{cases}$ d'où $x\mapsto\sqrt{P(x)}$ ne peut pas être une primitive de f sur IR avec $P(x)$ est un polynôme de second degré.

3) $\varphi(x)=h(x)\sqrt{3x^2+5}$; $\varphi'(x)=h'(x)\sqrt{3x^2+5}+\dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+5}}h(x)=\dfrac{h'(x)(3x^2+5)+3xh(x)}{\sqrt{3x^2+5}}$

b) $\varphi'(x)=f(x)\Rightarrow$; $h'(x)(3x^2+5)+3xh(x)=6x^2+5$

$x\mapsto 6x^2+5$ est un polynôme de second degré. On pose $h(x)=ax+b$ avec $a,b\in IR$

$\varphi'(x)=\dfrac{a(3x^2+5)+3x(ax+b)}{\sqrt{3x^2+5}}=\dfrac{6ax^2+3bx+5a}{\sqrt{3x^2+5}}$; φ une primitive de f sur IR ; $\forall x\in IR$

$\varphi'(x)=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}6a=6\\3b=0\\5a=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$ d'où $h(x)=x$ et par suite la fonction φ est définie sur IR par

$\varphi(x)=x\sqrt{3x^2+5}$ est une primitive de f sur IR.

<u>Exercice N° 12 :</u> 1) a) On a : $h:x\mapsto 2\tan x$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan x\in IR_+^*$, $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et On a F est dérivable sur IR_+^* d'où $g=F\circ h$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

$g'(x)=2\tan'(x)\times F'(2\tan x)=2(1+\tan^2 x)f(2\tan x)=\frac{1}{2}$

b) $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$; $g'(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{2}x+k$ avec $k\in IR$ or $g(0)=F(2\tan 0)=F(0)=0$ et comme

$g(0)=\frac{1}{2}\times 0+k\Rightarrow k=0$ enfin $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$; $g(x)=\frac{1}{2}x$ On a $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

$F(2\sqrt{3})=F\left(2\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$

2) a) $\alpha: x\mapsto\frac{2}{x+1}$ et $\beta: x\mapsto\frac{2x}{x+2}$ deux fonctions rationnelles définies sur IR_+ donc dérivables sur IR_+ et $\forall x\in IR_+$ $\frac{2}{x+1}\in IR_+$ et $\frac{2x}{x+2}\in IR_+$ donc $h=F\circ\alpha+F\circ\beta$ est dérivable sur IR_+ et

$\forall x\in IR_+$; $h'(x)=\alpha'(x)F'(\alpha(x))+\beta'(x)F'(\beta(x))=\frac{-2}{(x+1)^2}\times f\left(\frac{2}{x+1}\right)+\frac{4}{(x+2)^2}f\left(\frac{2x}{x+2}\right)$

$=\frac{-2}{(x+1)^2}\times\frac{1}{\left(\frac{2}{x+1}\right)^2+4}+\frac{4}{(x+2)^2}\times\frac{1}{\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2+4}=\frac{-2}{4+4(x+1)^2}+\frac{4}{4x^2+4(x+2)^2}$

$=\frac{-2}{4+4x^2+8x+4}+\frac{4}{4x^2+4x^2+16x+16}=\frac{-1}{2x^2+4x+4}+\frac{1}{2x^2+4x+4}=0$

b) On a $\forall x\in IR_+$; $h'(x)=0\Leftrightarrow h(x)=c$ avec $c\in IR$. Or $h(0)=F(2)+F(0)=F(2)+0$

$=F(2)=F\left(2\tan\frac{\pi}{4}\right)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}$ car $g(x)=\frac{x}{2}$ et par suite $\forall x\in IR_+$; $h(x)=\frac{\pi}{8}$

$F\left(\frac{2}{x+1}\right)+F\left(\frac{2x}{x+2}\right)=\frac{\pi}{8}\ \forall x\in IR_+$ (*). On remplace x par 3 dans (*) ; on obtient : $F\left(\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{6}{5}\right)=\frac{\pi}{8}$

Exercice 13: 1) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$; $\forall x\in[-2,2]$

$x\mapsto 4-x^2$ est continue et positive sur $[-2,2]$ donc f est continue sur $[-2,2]$ donc f admet des primitives sur $[-2,2]$

2) On a : $\begin{cases} f \text{ derivable sur } [-2,2] \\ F'(x)=f(x)=\sqrt{4-x^2} \\ F(0)=0 \\ H(x)=F(x)+F(-x); \forall x\in[-2,2]\end{cases}$

a) *On a $x\mapsto F(x)$ est derivable sur $[-2,2]$ On a : $\begin{cases} x\mapsto -x \text{ est derivable sur } [-2,2] \\ F \text{ est derivable sur } [-2,2] \\ \forall x\in[-2,2];(-x)\in[-2,2]\end{cases}\Rightarrow x\mapsto F(-x)$ est dérivable sur $[-2,2]$ Donc H est dérivable sur $[-2,2]$ * $H'(x)=F'(x)-F'(-x)=\sqrt{4-x^2}-\sqrt{4-x^2}=0$

* $H'(x)=0;\forall x\in[-2,2]$ d'ou H est constante sur $[-2,2]$

$H(0)=F(0)+F(0)=0\Rightarrow H(x)=0;\forall x\in[-2,2]$

b) Si $x\in[-2,2]$; $(-x)\in[-2,2]$ $H(x)=0\Leftrightarrow F(x)+F(-x)=0\Leftrightarrow F(-x)=-F(x)$ D'ou F est impaire

Exercice 14: 1) si $x\in\mathbb{R},(4-x)\in\mathbb{R}$

$f(4-x)=\frac{1}{(4-x)^2-4(4-x)+5}=\frac{1}{16-8x+x^2-16+4x+5}=f(x)$ D'ou Δ est un axe de symétrie de (ζ_f)

2)a) $G(x)=F(4-x)+F(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

On a $\begin{cases} x\mapsto 4-x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x\in\mathbb{R},(4-x)\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow x\mapsto F(4-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x\mapsto F(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ G est dérivable sur $\mathbb{R}$

* $G'(x)=-F'(4-x)+F'(x)=-f(4-x)+f(x)=0$ car $f(4-x)=f(x)$

* $G'(x)=0;\forall x\in\mathbb{R}$ d'ou G est constante sur $\mathbb{R}$ $G(2)=F(2)+F(2)=0$ d'ou $G(x)=0$; $\forall x\in\mathbb{R}$

b) Si $x\in\mathbb{R},(4-x)\in\mathbb{R}$

$F(4-x)+F(x)=G(x)=0$ d'ou $I(2,0)$ est un centre de symétrie de (Γ)

3)a) $H(x)=F(2+\tan x)$; $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

On a : $\begin{cases} x\mapsto 2+\tan x \text{ est dérivable sur } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[;(2+\tan x)\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow$ H est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$H'(x)=(1+\tan^2 x)F'(2+\tan x)=(1+\tan^2 x)f(2+\tan x)=(1+\tan^2 x)\frac{1}{(2+\tan x)^2-4(2+\tan x)+5}$

$=\frac{1+\tan^2 x}{4+4\tan x+\tan^2 x-8-4\tan x+5}=\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=1$

b) $H'(x)=1$; $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow H(x)=x+c;(c\in\mathbb{R})$; $H(0)=F(2+\underbrace{\tan 0}_{0})=f(2)=0$ D'ou $c=0$

D'ou $H(x)=x$; $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; $F(1)=F(2-1)=F\left(2+\underbrace{\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)}_{-1}\right)=H\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}$

****

SOLUTION DES EXERCICES RELATIFS AU CHAPITRE

****

Exercice N°1 1) c) ; 2)a) ; 3) d) ; 4) c) ; 5) b) ; 6) c) , 7) a, 8) b) , 9) a) , 10)c)

Exercice N°2 1) Vrai car $0<\sin\pi x<1$ pour $0<x<1$ $\Rightarrow 0\le x^n\sin\pi x\le x^n$, $x\mapsto x^n$ et $x\mapsto x^n\sin\pi x$ sont continues sur $[0,1]\Rightarrow 0\le U_n\le\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}U_n=0$.

2) Vrai car $\left|\int_0^x\sqrt[5]{t^2+4}\,dt\right|\le\int_0^x\left|\sqrt[5]{t^2+4}\right|dt=\int_0^x\sqrt[5]{t^2+4}\,dt$

3) Vrai car la fonction $t\mapsto t^2\sin t$ est continue et impaire sur $[-\alpha,\alpha]$

4) Faux : $\int_{-2}^{2}t\,dt=0$ et $t\mapsto t$ est une fonction non nulle.

5) Vrai car

$S_\Delta(\zeta_{f^{-1}})=\zeta_f$, $S_\Delta(x=c)=(y=f^{-1}(c)=a)$, $S_\Delta(x=d)=(y=f^{-1}(d)=b)$ et $S_\Delta(y=0)=(x=0)$ avec $\Delta: y=x$. Alors A est l'aire de la partie du plan limitée par $\zeta_{f^{-1}}$ et les droites d'équations y = a , y = b et x = 0 car S_Δ conserve les mesures d'aires.

6) Faux ; contre exemple $\left(\int_0^1 t\,dt\right)\left(\int_0^1 t\,dt\right)=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ et $\int_0^1 t\times t\,dt=\int_0^1 t^2\,dt=\frac{1}{3}$

7) vrai

Exercice N°3 : $A=\int_0^3|x^2-2x|dx=\int_0^2|x^2-2x|dx+\int_2^3|x^2-2x|dx=\int_0^2-(x^2-2x)dx+\int_2^3(x^2-2x)dx$

$=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3=-\left(\frac{8}{3}-4\right)+\left(9-9-\frac{8}{3}+4\right)=8-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}$

$B=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1+2x^3}}dx$, on pose $u(x)=1+2x^3\Rightarrow u'(x)=6x^2$ donc $B=\int_0^1\frac{1}{3}\frac{U'(t)}{2\sqrt{U(t)}}dt=\frac{1}{3}\left[\sqrt{U(t)}\right]_0^1$

$B=\frac{1}{6}\left[2\sqrt{1+2x^3}\right]_0^1=\frac{1}{3}(\sqrt{3}-1)$

$C=\int_0^1\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx=\int_0^1\frac{1+\cos(\pi x)}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^1=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$; $\left(\forall a\in IR,\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}\right)$

$D=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}tg^2x\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left[(tg^2x+1)-1\right]dx=[tgx-x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6}$.

$E=\int_0^\pi\sin^6 x\,dx$, On effectue un processus de

linéarisation $\Rightarrow E=\frac{-1}{32}\left[\frac{1}{6}\sin 6x-\frac{6}{4}\sin 4x+\frac{15}{2}\sin 2x-10x\right]_0^\pi=\frac{-1}{32}(-10\pi)=\frac{5\pi}{16}$.

$F=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}x\tan^2(x^2)dx=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}x(1+\tan^2x^2)-x\,dx=\left[\frac{1}{2}\tan x^2-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{\pi}{12}$.

Exercice N° 4 : A l'aide d'une intégration par partie $A=\int_0^3\frac{h}{\sqrt{1+h}}dh=\left[2h\sqrt{1+h}\right]_0^3-\int_0^3 2\sqrt{1+h}\,dh$

$=6\sqrt{4}-2\left[\frac{2}{3}(1+h)\sqrt{1+h}\right]_0^3=12-\frac{4}{3}\left[4\sqrt{4}-1\right]=12-\frac{28}{3}=\frac{8}{3}$

Posons $u(\alpha)=\alpha^2\Rightarrow u'(\alpha)=2\alpha$, $v'(\alpha)=\sin\alpha\Rightarrow v(\alpha)=-\cos\alpha$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha^2\sin\alpha\,d\alpha=[-\alpha\cos\alpha]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha\cos\alpha\,d\alpha=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha\cos\alpha\,d\alpha$.

On pose $u(\alpha)=\alpha\Rightarrow u'(\alpha)=1$, $v'(\alpha)=\cos\alpha\Rightarrow v(\alpha)=\sin\alpha$.

Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha\cos\alpha\,d\alpha=[\alpha\sin\alpha]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\,d\alpha=\frac{\pi}{2}-[-\cos\alpha]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$. Ainsi $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha^2\sin\alpha\,d\alpha=\pi-2$.

Exercice N° 5 : 1) $B+C=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}+\frac{x^5}{\sqrt{x^3+1}}dx=\int_0^1\frac{x^2(x^3+1)}{\sqrt{x^3+1}}dx=\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx=A$

2) $A=\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$, on pose $u(x)=x^3+1\Rightarrow u'(x)=3x^2$. $\Rightarrow x^2\sqrt{x^3+1}=\frac{1}{3}u'(x)\sqrt{u(x)}$

donc $A=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_0^1=\frac{2}{9}\left[(x^3+1)\sqrt{x^3+1}\right]_0^1=\frac{4\sqrt{2}}{9}-\frac{2}{9}$.

$B=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$, on pose $v(x)=x^3+1\Rightarrow v'(x)=3x^2$: $\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}=\frac{1}{3}\frac{v'(x)}{\sqrt{v(x)}}$

donc $B=\frac{1}{3}\left[2\sqrt{v(x)}\right]_0^1=\frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3+1}\right]_0^1=\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}$. $C=A-B=\frac{-2\sqrt{2}}{9}+\frac{4}{9}$.

Exercice 6 : 2) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$ (tangente horizontale)

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ car $\Delta: y=x-2$ est une asymptote verticale à ζ_f au voisinage de $(+\infty)$.

3) a) f est continue et strictement croissante sur IR donc f réalise une bijection de IR dans $f(IR)=IR$.

b) $\zeta_{f^{-1}}=S_\Delta(\zeta_f)$; $\Delta: y=x$.

c) f dérivable en 0 et $f'(0)=0$ *donc* ζ_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0 alors par raison de symétrie par rapport $=\Delta: y=x$ $\zeta_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale au point d'abscisse $f(0)=0$ donc f^{-1} n'est pas dérivable en 0.

4) a) On a ζ_f au dessous de $\Delta_1: y=x+2$ et ζ_f au dessus de $\Delta_2: y=x-2$ *donc* $x-2\le f(x)\le x+2$

b) $x\mapsto x-2$ *et* $x\mapsto f(x)$ *et* $x\mapsto x+2$ sont trois fonctions continues sur $[0;\lambda]$ $\forall\ \lambda\ge 0$

$$\int_0^{\lambda} x-2\ dx\le\int_0^{\lambda} f(x)dx\le\int_0^{\lambda} x+2\ dx\Rightarrow\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^{\lambda}\le A_\lambda\le\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^{\lambda}\Rightarrow\frac{\lambda^2}{2}-2\lambda\le A_\lambda\le\frac{\lambda^2}{2}+2\lambda$$

c) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2}{2}-2\lambda=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A_\lambda=+\infty$

II) 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}a+\frac{b}{\sqrt{x^2+4}}=0\Leftrightarrow a+\frac{b}{2}=0\Rightarrow b=-2a$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}a+\frac{b}{\sqrt{4+x^2}}=1\Rightarrow a=1$ On a : $\Rightarrow\begin{cases}b=-2a\\a=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-2\\a=1\end{cases}$

2) $A_\lambda=\int_0^{\lambda}x-\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}dx=\left[\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x^2+4}\right]_0^{\lambda}=\frac{\lambda^2}{2}-2\sqrt{\lambda^2+4}+4$

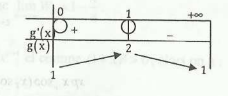
3) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A_\lambda=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2}{2}-2\sqrt{\lambda^2+4}+4=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\left(\frac{\lambda}{2}-2\sqrt{1+\frac{4}{\lambda^2}}\right)+4=+\infty$

Exercice N° 71) a) $\forall x\in[0;+\infty[\ ;\ \frac{1}{2}\le f(x)\le 1$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{f(x)-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{f(x)-1}{x-0}}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

2) h est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$ donc elle réalise une bijection de $[0;1]$ sur $h([0;1])=[h(1);h(0)]=\left[\frac{1}{2};1\right]=K$

h est dérivable sur $]0;1[$ et $\forall x\in]0;1[$; $h'(x)\ne 0$ donc h^{-1} est dérivable sur $h(]0;1[)=\left]\frac{1}{2};1\right[$; la courbe ξ_h de h admet au point d'abscisse 0 une demi tangente horizontale car $h'(0)=0$ donc par raison de symétrie par rapport à $\Delta: y=x$; $\xi_{h^{-1}}$ admet une demi tangente verticale au point d'abscisse $h(0)=1$ donc h^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 1 de même on montre que h^{-1} n'est dérivable à droite en $\frac{1}{2}$ et par suite h^{-1} est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};1\right[$

3) a) f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f(x)\ne 0$ $\forall x\in[0;+\infty[$ donc g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $g'(x)=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$



4) On a $\forall x\in[0,1]$; $g(x)\ge 0$ donc I est l'aire de la partie

du plan limitée par ξ_g et les droites d'équations : $y=0$, $x=0$ et $x=1$.

b) $\forall\ x\in[0;1]$; $1\le g(x)\le 2$ et $x\mapsto g(x)$ et $x\mapsto 1$ et $x\mapsto 2$ trois fonctions continues sur $[0;1]$

$\Rightarrow\int_0^1 1\,dx\le\int_0^1 g(x)dx\le\int_0^1 2\,dx\Rightarrow[x]_0^1\le I\le[2x]_0^1\Rightarrow 1\le I\le 2$

c) $I+J=\int_0^1 g(x)+xg'(x)\,dx=[xg(x)]_0^1=g(1)=2$

d) On a : $1\le I\le 2\Leftrightarrow 1\le 2-J\le 2\Leftrightarrow -1\le -J\le 0\Rightarrow 0\le J\le 1$

Exercice 8 :1) $I_0=\int_0^1-\left(-\sqrt{1-x}\right)dx=-\left[\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1=\frac{2}{3}$

2)a) $\forall x\in[0;1]$ on a $x^{n+1}\le x\Rightarrow x^{n+1}\le x^n\sqrt{1-x}$ et comme $x\to x^n\sqrt{1-x}$ et $x\to x^{n+1}\sqrt{1-x}$ sont deux fonctions continues sur $[0;1]$ donc $\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}dx\le\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$ et par suite (I_n) est décroissante. Or $0\le x^n\sqrt{1-x}$ $\forall x\in[0;1]$ donc $0\le I_n\Rightarrow(I_n)$ est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

b) On a : $\forall x\in[0;1]$; $-x\le 0\Leftrightarrow 1-x\le 1\Leftrightarrow\sqrt{1-x}\le 1\Rightarrow x^n\sqrt{1-x}\le x^n$

$\Rightarrow\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx\le\int_0^1 x^n dx\Rightarrow I_n\le\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$ on a $0\le I_n\le\frac{1}{n+1}\Rightarrow 0\le\lim\limits_{n\to+\infty}I_n\le 0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$

3)a) $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}dx$. On pose $U(x)=x^{n+1}\Leftrightarrow U'(x)=(n+1)x^n$; $V'(x)=\sqrt{1-x}$

$\Rightarrow V(x)=-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$; $I_{n+1}=\left[-\frac{2}{3}(1-x)\left(\sqrt{1-x}\right)x^{n+1}\right]_0^1+\frac{2}{3}\int_0^1(n+1)x^n(1-x)\sqrt{1-x}$

$=\frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx-\frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}dx=\frac{2}{3}(n+1)I_n-\frac{2}{3}(n+1)I_{n+1}$

$\Rightarrow\left[1+\frac{2}{3}(n+1)\right]I_{n+1}=\frac{2}{3}(n+1)I_n\Rightarrow(2n+5)I_{n+1}=2(n+1)I_n$

b) $5I_1=2I_0\Rightarrow I_1=\frac{2}{5}I_0=\frac{4}{15}$

c) $J=\int_0^1\left(x^2+2x+1\right)\sqrt{1-x}dx=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}dx+2\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx+\int_0^1\sqrt{1-x}=I_2+2I_1+I_0=\frac{4}{7}I_1+2I_1+I_0$

Exercice N° 9 :

1) $U_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$, $U_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\ dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1+\cos 2t\,dt=\frac{1}{2}[t+\sin(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-0)=\frac{\pi}{4}$.

2) $U_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+2}t\,dt$, à l'aide d'une intégration par partie: soit

$u(x)=\cos^{n+1}(x)\Rightarrow u'(x)=-(n+1)\sin(x)\cos^n(x)$ et $v'(x)=\cos x\Rightarrow v(x)=\sin x$.

$U_{n+2}=\left[\sin x\cos^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^n x\,dx=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^n x\,dx$

$=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+2}x\,dx=(n+1)U_n-(n+1)U_{n+2}$

$\Rightarrow(n+2)U_{n+2}=(n+1)U_n\Rightarrow U_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}U_n\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Pour n = 0, $U_2=\frac{\pi}{4}$ *et* $\frac{0+1}{0+2}U_0=\frac{\pi}{4}$ signifie la relation est vraie pour n= 0

$\Rightarrow$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}U_n$

3) Démonstration par récurrence.

Pour n = 0, $U_0=\frac{\pi}{2}$, $\frac{(2\times 0)!\pi}{(0!)^2 2^{2\times 0+1}}=\frac{\pi}{2}$. Ainsi la propriété est vraie pour n = 0.

Supposons que $U_{2n}=\frac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{2n+1}}$ et montrons que $U_{2n+2}=\frac{(2n+2)!\pi}{((n+1)!)^2 2^{2n+3}}$.

On a $U_{2n+2}=\frac{2n+1}{2n+2}U_{2n}$ (d'après 2) $\Rightarrow U_{2n+2}=\frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{2n+1}}=\frac{(2n+1)!\pi}{2(n+1)n!n!2^{2n+1}}=\frac{(2n+1)!\pi}{(n+1)!n!2^{2n+2}}$

$=\frac{(2n+2)(2n+1)!\pi}{(2n+2)(n+1)!n!2^{2n+2}}=\frac{(2n+2)!\pi}{((n+1)!)^2 2^{2n+3}}$ Donc d'après le principe de récurrence , on a :

$U_{2n}=\frac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{2n+1}}\ \forall n\in\mathbb{N}$.

4) On pose $t_n=(n+1)U_{n+1}U_n$, $t_{n+1}=(n+2)U_{n+2}U_{n+1}$.

Or $(n+1)U_n=U_{n+2}(n+2)$ (d'après 2)Donc $t_{n+1}=(n+1)U_{n+1}U_n=t_n\ \forall n\in\mathbb{N}$. Donc la suite (t_n) est une suite constante. $\Rightarrow t_n=t_0=U_1U_0=\frac{\pi}{2}\Rightarrow(n+1)U_{n+1}U_n=\frac{\pi}{2}\ \forall n\in\mathbb{N}.\Rightarrow t_n=\frac{\pi}{2}\forall n\in\mathbb{N}$ donc t est indépendante de n.

5) Ainsi $(2n+1)U_{2n+1}U_{2n}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow U_{2n+1}=\frac{\pi}{2(2n+1)U_{2n}}=\frac{\pi(n!)^2 2^{2n+1}}{2(2n+1)(2n)!\pi}=\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2(2n+1)!\pi}$.

Exercice N°10: 1)a) f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ car $x\mapsto\sin x$ dérivable et $\sin x\ne 0$ pour $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

$f'(x)=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}\ge 0$ pour $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$. f est continue strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ donc f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ sur $f\left(\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)=\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right),\lim\limits_{x\to\pi}f(x)\right[=[1,+\infty[$.

b) f est dérivable sur $]1,+\infty[$ *et* $f'(x)\ne 0$ pour $x\in]1,+\infty[$, donc f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$ et on a

$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. On pose $f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow\frac{1}{\sin y}=x$.

$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{-\frac{\cos y}{\sin^2 y}}$. Or $\cos^2 y+\sin^2 y=1$ *et* $\cos y<0$ *car* $y\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\Rightarrow\cos y=-\sqrt{1-\sin^2 y}$.

$\Rightarrow\cos y=-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{-\sqrt{x^2-1}}{x}$ *et* $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ pour $x\in]1,+\infty[$; $f^{-1}(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1)}}$.

2) $J=\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}}\left(f^{-1}\right)'(x)dx=f^{-1}(\sqrt{2})-f^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$f^{-1}\left(\sqrt{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ *et* $f^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow J=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{12}$.

Exercice 11:1) $F'(x)=f(x)\le 0$ $\forall x\in]1;+\infty[$; donc F est décroissante sur $]1;+\infty[$.

2) $x\mapsto\sin x$ est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$; $\sin x\ne 0$ donc $x\mapsto\frac{1}{\sin x}$ est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$; $0<\sin x<1\Rightarrow\frac{1}{\sin x}>1$ et comme F est dérivable sur $]1;+\infty[$ donc G est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $G'(x)=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}.F'\left(\frac{1}{\sin x}\right)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\left(\frac{-1}{\frac{1}{\sin x}\sqrt{\left(\frac{1}{\sin}\right)^2-1}}\right)=\frac{\cos x}{\sin x\sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}}}=1$

b) $G'(x)=1\Rightarrow G(x)=x+k$ *avec* $k\in IR$ or $G\left(\frac{\pi}{4}\right)=F\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)=F\left(\sqrt{2}\right)=0\Rightarrow\frac{\pi}{4}+k=0$

$\Rightarrow k=-\frac{\pi}{4}$ et par suite $G(x)=x-\frac{\pi}{4}$

c) $I=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=-\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=-\int_{\sqrt{2}}^{2}f(x)dx=-\left[F(2)-F\left(\sqrt{2}\right)\right]=-\left[G\left(\frac{\pi}{6}\right)-G\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$=-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{12}$

Exercice 12 : 1)a) $x\mapsto(\tan x)^n$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, donc U_n existe.

b) $U_{n+1}-U_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+1}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(\tan x-1)\,dx$. On a $\tan^n x\geq 0\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$; $h:x\mapsto \tan x$ est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow 0\leq\tan x\leq 1\Rightarrow(\tan x)^n(\tan x-1)\leq 0$ pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ $\Rightarrow U_{n+1}-U_n\leq 0$ et la suite U est décroissante.

2)a) $U_n+U_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^n x+\tan^{n+2}x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,(1+tg^2x)\,dx=\left[\frac{1}{n+1}\tan^n x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}$.

$\lim_{n\to+\infty}(U_n+U_{n+2})=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$. Or U est décroissante minorée par 0, donc U est convergente vers une limite L. $\lim_{n\to+\infty}U_{n+2}=\lim_{n\to+\infty}U_n=L\Rightarrow L+L=0\Rightarrow L=0$.

b) On a U est décroissante, donc $U_n\geq U_{n+2}\Rightarrow U_n\geq\frac{1}{n+1}-U_n\Rightarrow U_n\geq\frac{1}{2(n+1)}$ (R_1)

On a $U_n\geq 0\Rightarrow U_{n+2}\geq 0$ *et* $U_n+U_{n+2}\geq U_n\Rightarrow\frac{1}{n+1}\geq U_n$ (R_2). (R_1) *et* (R_2) donnent $\frac{1}{2(n+1)}\leq U_n\leq\frac{1}{n+1}$.

c) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2(n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}U_n=0$

3) a) On a d'après 1) $U_n=-U_{n+2}+\frac{1}{n+1}$ *et* $U_{n+2}=-U_{n+4}+\frac{1}{n+3}$.

Donc $U_n-U_{n+2}=-U_{n+2}+\frac{1}{n+1}+U_{n+4}-\frac{1}{n+3}\Rightarrow U_{n+4}=U_n+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+1}$ (*).

b) On remplace n par 4n -2 dans (*), on obtient : $U_{4n+2}=U_{4n-2}+\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n-1}\ \forall n\geq 1$.

$U_6=U_2+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}$

$U_{10}=U_6+\frac{1}{9}-\frac{1}{7}$

....

$U_{4n+2}=U_{4n-2}+\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n-1}$

On somme membre à membre ces égalités et après simplification, on obtient : $U_{4n+2}=U_2-W_n$.

c) On a pour tout $n\geq 1, U_{4n+2}=U_2-W_n$ et comme $\lim_{n\to+\infty}U_n=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}U_{4n+2}=0$ *et* $\lim_{n\to+\infty}W_n=U_2$.

Or $U_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}((1+tg^2x)-1)\,dx=[tgx-x]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$. Donc $\lim_{n\to+\infty}W_n=1-\frac{\pi}{4}$.

Exercice 13 : 1) Soit $x\in[0,1], x^n-x^{n+1}=x^n(1-x)\geq 0\Rightarrow x^n\geq x^{n+1}$ et comme $(1+x)^2>0$, alors on a :

$0\leq\frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\leq\frac{x^n}{(1+x)^2}$. Ces fonctions sont continues sur $[0,1]$, donc : $\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}dx\leq\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}dx$ $\Rightarrow 0<I_{n+1}\leq I_n$. Ainsi I est décroissante. D'autre part, on a $I_n\geq 0\Rightarrow I$ est minorée par 0 et par suite I est convergente.

2) $0\leq x\leq 1\Rightarrow 1\leq(x+1)^2\leq 4$ *et* $x^n\geq 0\Rightarrow\frac{x^n}{4}\leq\frac{x^n}{(1+x)^2}\leq x^n$. Ce sont des fonctions continues sur $[0,1]$, donc : $\frac{1}{4}\int_0^1 x^n\,dx\leq I_n\leq\int_0^1 x^n\,dx\Rightarrow\frac{1}{4(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}\Rightarrow|I_n|\leq\frac{1}{n+1}$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

3) a) $I_n=\int_0^1 x^n\frac{1}{(x+1)^2}dx$, on pose $u(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ *et* $v'(x)=x^n\Rightarrow u'(x)=\frac{-2}{(x+1)^3}$ *et* $v(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$.

$I_n=\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(x+1)^2}\right]_0^1+\frac{2}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(1+x)^3}dx=\frac{1}{4(n+1)}+\frac{2}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(1+x)^3}dx\Rightarrow(n+1)I_n=\frac{1}{4}+2\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(1+x)^3}dx$.

b) $x\in[0,1]\Rightarrow 1\leq(x+1)^3\leq 8$ *et* $x^{n+1}\geq 0\Rightarrow\frac{x^{n+1}}{8}\leq\frac{x^{n+1}}{(x+1)^3}\leq x^{n+1}$. Ces fonctions sont continues sur $[0,1]$, donc : $\int_0^1\frac{x^{n+1}}{8}dx\leq\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(x+1)^3}dx\leq\int_0^1 x^{n+1}\,dx\Rightarrow\frac{1}{4}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1\leq 2\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(x+1)^3}dx\leq\left[2\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$

$\Rightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{4(n+2)}\leq(n+1)I_n\leq\frac{1}{4}+\frac{2}{n+2}$.

c) On a $\frac{1}{4}+\frac{1}{4(n+2)}\leq(n+1)I_n\leq\frac{1}{4}+\frac{2}{n+2}$, or $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}+\frac{1}{4(n+2)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}+\frac{2}{n+2}=\frac{1}{4}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}(n+1)I_n=\frac{1}{4}$.

Or $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$, alors $\lim_{n\to+\infty}nI_n=\lim_{n\to+\infty}[(n+1)I_n-I_n]=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$.

4) a) $I=\int_0^1\frac{-(1+x)+1}{(x+1)^3}dx=\int_0^1\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{1}{(x+1)^2}dx=\left[\frac{-1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}\right]_0^1=\frac{-1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=\frac{-1}{8}$.

b) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k x^k=\sum_{k=1}^{n}(-x)^k$ somme de n termes d'une suite géométrique de raison q = -x ≠ 1 et de 1er terme (-x) $\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}(-x)^k=-x\frac{1-(-x)^n}{1+x}=\frac{-x}{1+x}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k I_k=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^1\frac{x^k}{(1+x)^2}dx=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k x^k\right)dx$ (Somme finie)=

$\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\left[\frac{-x}{1+x}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}\right]dx=\int_0^1\frac{-x}{(x+1)^3}dx+(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(1+x)^3}dx$. Ainsi : $S_n-I=(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(1+x)^3}dx$.

c) $|S_n-I|=|(-1)^n|\left|\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(1+x)^3}dx\right|$ et comme $\frac{x^{n+1}}{(1+x)^3}\geq 0\ \forall x\in[0,1]$, donc $|S_n-I|=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(1+x)^2(1+x)}dx$.

$x\in[0,1]\Rightarrow 0<\frac{1}{1+x}\leq 1\Rightarrow\frac{x^{n+1}}{(1+x)^2(1+x)}\leq\frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\Rightarrow|S_n-I|\leq\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}dx=I_{n+1}$

or $\lim_{n\to+\infty}I_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}I_n=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}(S_n-I)=0$ Donc $\lim_{n\to+\infty}S_n=I=\frac{-1}{8}$.

Exercice 14 : 1) $F_{n+1}=\int_0^x\frac{t^{2n+3}}{\sqrt{4-t^2}}dt$.

On pose $u(t)=t^{2n+2}\Rightarrow u'(t)=(2n+2)t^{2n+1}$, $v'(t)=\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}\Rightarrow v(t)=-\sqrt{4-t^2}$.

$F_{n+1}(x)=\int_0^x t^{2n+2}\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}dt=\left[-t^{2n+2}\sqrt{4-t^2}\right]_0^x+2(n+1)\int_0^x t^{2n+1}\sqrt{4-t^2}\,dt=$

$-x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}+2(n+1)\int_0^x t^{2n+1}\sqrt{4-t^2}\,dt$ (*).

2) Pour n = 0, on a : $F_0(x)=\int_0^x\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}dt=\left[-\sqrt{4-t^2}\right]_0^x=-\sqrt{4-x^2}+2$.

$\lim_{x\to 2}F_0(x)=-\sqrt{4-2^2}+2=2$, $L_0=2$ *et* $2\frac{16^0(0!)^2}{1!}=2$. Donc la relation est vraie pour n =0. Supposons que :

$\lim_{x\to 2}F_n(x)=L_n=2\times\frac{16^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ et montrons que $\lim_{x\to 2}F_{n+1}(x)=L_{n+1}=2\times\frac{16^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}$.

$\int_0^x t^{2n+1}\sqrt{4-t^2}\,dt=\int_0^x\frac{t^{2n+1}(4-t^2)}{\sqrt{4-t^2}}dt=4\int_0^x\frac{t^{2n+1}}{\sqrt{4-t^2}}dt-\int_0^x\frac{t^{2n+3}}{\sqrt{4-t^2}}dt=4F_n(x)-F_{n+1}(x)$.

Donc d'après(*) , $F_{n+1}(x)=-x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}+2(n+1)(4F_n(x)-F_{n+1}(x))$

$\Leftrightarrow(3+2n)F_{n+1}(x)=-x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}+8(n+1)F_n(x)\Leftrightarrow F_{n+1}(x)=\frac{-1}{3+2n}\left(x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}\right)+\frac{8(n+1)}{3+2n}F_n(x)$

$\lim_{x\to 2}F_{n+1}(x)=\frac{8(n+1)}{3+2n}L_n\Leftrightarrow L_{n+1}=\frac{8(n+1)}{3+2n}L_n$. Or d'après l'hypothèse de récurrence

$L_n=2\frac{16^n(n!)^2}{(2n+1)!}\Rightarrow L_{n+1}=\frac{8(n+1)}{3+2n}\frac{2\times 16^n(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{16^{n+1}(n+1)!n!(2n+2)}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}$

$\Rightarrow L_{n+1}=\frac{2\times 16^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}$. Ainsi $\lim_{x\to 2}F_n(x)=2\times\left(\frac{16^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)\forall n\in\mathbb{N}$.

Exercice 15: 1)

$f'(x)=\frac{(x+1)^3-3(x+1)^2(x+2)}{(x+1)^6}=\frac{-2x-5}{(x+1)^4}=<0\ \forall x>-1$.

$\lim_{(-1)^+}f(x)=\lim_{(-1)^+}\frac{x+2}{(x+1)^3}=\frac{1}{0^+}=+\infty$,

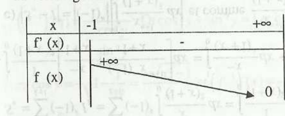
$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{+\infty}\frac{x+1+1}{(x+1)^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}=0$.

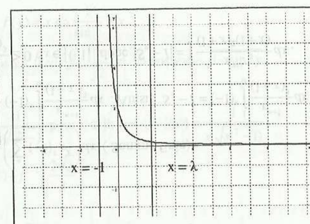
(x = -1) est une asymptote verticale à ζ_f

et (y = 0) est une asymptote horizontale à ζ_f

au voisinage de +∞.

x	-1	+∞
f' (x)	-	
f (x)	+∞	0





2) $A(\lambda)=\int_0^{\lambda}|f(t)|\,dt=\int_0^{\lambda}f(t)\,dt=\int_0^{\lambda}\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}\right)dx=\left[\frac{1}{1-2}(x+1)^{1-2}+\frac{1}{1-3}(x+1)^{1-3}\right]_0^{\lambda}$

$=1-(\lambda+1)^{-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\lambda+1)^{-2}=\frac{-1}{\lambda+1}-\frac{1}{2(\lambda+1)^2}+\frac{3}{2}.\Rightarrow\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\frac{3}{2}$.

3) a) Pour tout $k\in\{0,1,2,...,n-1\}$, $\frac{k}{n}$ *et* $\frac{k+1}{n}$ sont deux éléments de $]-1,+\infty[$, f est décroissante sur $]-1,+\infty[$, $\frac{k}{n}\leq t\leq\frac{k+1}{n}\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq f(t)\leq f\left(\frac{k}{n}\right)$. En intégrant entre $\frac{k}{n}$ *et* $\frac{k+1}{n}$,

$\Rightarrow\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f\left(\frac{k+1}{n}\right)dt\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\,dt\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f\left(\frac{k}{n}\right)dt\Rightarrow\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\,dt\leq\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)$

$\Rightarrow\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\,dt\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ (*)

b) D'après (*) ,

$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\,dt\leq\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\Rightarrow\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+...+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]\leq\int_0^1 f(t)\,dt$

$\leq\frac{1}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+...+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]\Rightarrow U_n+\frac{f(1)}{n}-\frac{f(0)}{n}\leq A(1)\leq U_n$. Or $f(1)=\frac{3}{8}$ *et* $f(0)=2$,

Donc $A(1)\leq U_n\leq A(1)+\frac{13}{8n}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} A(1) \le \lim\limits_{n\to+\infty} U_n \le \lim\limits_{n\to+\infty} A(1)+\frac{13}{8n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = A(1) = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times4}+\frac{3}{2}=\frac{7}{8}$.

Exercice 16 :

1) a) $0\le x\le 1 \Leftrightarrow 0\le x^2\le 1 \Leftrightarrow -1\le -x^2\le 0 \Leftrightarrow 0\le 1-x^2\le 1 \Leftrightarrow 0\le\sqrt{1-x^2}\le 1 \Leftrightarrow 0\le x^n\sqrt{1-x^2}\le x^n$

D'où $0\le\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx \le \int_0^1 x^n dx \Leftrightarrow 0\le U_n \le \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$ donc $0\le U_n\le\frac{1}{n+1}$.

b) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

2) $U_{n+2}=\int_0^1 x^{n+2}\sqrt{1-x^2}dx$; On pose $\begin{cases} u' = -2x\sqrt{1-x^2} \\ v = -\frac{x^{n+1}}{2}\end{cases}$ *et* $\begin{cases} u = \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\ v' = -\frac{(n+1)x^n}{2}\end{cases}$;

$U_{n+2}=\left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{-x^{n+1}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{3}\frac{-(n+1)}{2}x^n(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$

d'où $U_{n+2}=\frac{(n+1)}{3}\int_0^1 x^n(1-x^2)\sqrt{1-x^2}dx = \frac{(n+1)}{3}\int_0^1\left(x^n\sqrt{1-x^2}-x^{n+2}\sqrt{1-x^2}\right)dx$

$U_{n+2}=\frac{(n+1)}{3}(U_n-U_{n+2})$ soit $U_{n+2}\frac{n+1}{3}U_n-\frac{n+1}{3}U_{n+2}$ *d'où* $U_{n+2}+\frac{n+1}{3}U_{n+2}=\frac{n+1}{3}U_n$ ainsi

$(n+4)U_{n+2}=(n+1)U_n$ Donc pour tout $n\in IN$ On a : $U_{n+2}=\frac{n+1}{n+4}U_n$

3) Soit $g(x)=\sqrt{1-x^2}$

a) g est continue sur $[-1;1]$; $0\in[-1;1]$; $\cos t\ [-1;1]$ *pour tout* $t\in IR \Rightarrow \phi(t)$ est dérivable sur IR

b) Soit G une primitive de g sur $[-1;1]$ alors pour tout $0\ t\in IR$ *On a* : $\phi(t)=G(\cos t)-G(0)$

ϕ est dérivable sur IR (comme somme et composée de fonctions dérivables)

$\phi'(t)=g(\cos t).(-\sin t) \Leftrightarrow \phi'(t)=-\sqrt{1-\cos^2 t}\,\sin t = -|\sin t|\sin t$

c) $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $\phi'(t)=-\sin^2 t$ or $\cos 2t = 1-2\sin^2 t \Rightarrow -\sin^2 t=\frac{\cos 2t-1}{2}\Rightarrow\phi'(t)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t)$ et par

suite $\phi(t)=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin(2t)+C$ or $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ *donc* $-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin(\pi)+C=0\Rightarrow C=\frac{\pi}{4}$. On a pour tout

$t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $\phi(t)=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{\pi}{4}$; $U_0=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\phi(0)=\frac{\pi}{4}$

4) a) (U_n) est une suite décroissante donc $U_{n+2}\le U_{n+1}\le U_n$ et comme $U_n>0$ On a $\frac{U_{n+2}}{U_n}\le\frac{U_{n+1}}{U_n}\le 1$ soit

$\frac{n+1}{n+4}\le\frac{U_{n+1}}{U_n}\le 1$

b) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+4}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{4}{n}\right)}=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=1$

c) $U_0=\frac{\pi}{4}$ *et* $U_1=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1(-2x)\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$;

$U_0U_1=\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2(0+1)(0+2)(0+3)}$

Supposons que $U_nU_{n+1}=\frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$ et montrons que $U_{n+1}U_{n+2}=\frac{\pi}{2(n+2)(n+3)(n+4)}$.

$U_{n+1}U_{n+2}=U_{n+1}\frac{n+1}{n+4}U_n=\frac{n+1}{n+4}U_nU_{n+1}=\frac{n+1}{n+4}\frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{\pi}{2(n+2)(n+3)(n+4)}$ Donc

pour tout $n\in IN$ $U_nU_{n+1}=\frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$

d) $U_n^2\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{\pi}{2n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}$ d'où $n^3U_n^2=\frac{\pi}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}.\frac{1}{\frac{U_{n+1}}{U_n}}$;

$n\sqrt{n}U_n=\sqrt{\frac{\pi}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}.\frac{1}{\frac{U_{n+1}}{U_n}}}$ On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}n\sqrt{n}U_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Exercice 17: 1)a) $t\mapsto 4-t^2$ est continue sur $[-2,2]$ et pour $t\in[-2,2], 4-t^2\ge 0$ donc $t\mapsto\sqrt{4-t^2}$ est continue sur $[-2,2]$. Comme 0 *et* $2\sin x\in[-2,2]$, alors F est bien définie sur $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

F(0)= $\int_0^0\sqrt{4-t^2}\,dt=0$.

b) Posons $G(x)=\int_0^x\sqrt{1-t^2}\,dt$ *et* $u(x)=2\sin x$. La fonction u est dérivable sur $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *et* $u'(x)=2\cos x$. La fonction $t\mapsto\sqrt{4-t^2}$ est continue sur $[-2,2]$, alors G est dérivable sur $[-2,2]$ et on a $u\left(\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)=[-2,2]$. Donc F = G o u est dérivable sur

$\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *et* $F'(x)=G'(u(x))u'(x)=\sqrt{4-u^2(x)}\times u'(x)=2\cos x\sqrt{4-4\sin^2 x}=4\cos^2 x$.

c) $F'(t)=4\cos^2 t\Rightarrow\int_0^x F'(t)dt=\int_0^x 4\cos^2 t\,dt=\int_0^x 4\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=[2t+\sin 2t]_0^x=2x+\sin 2x$.

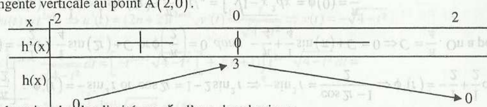
F(x) –F(0) = 2x + sin2x et donc F(x) = 2x + sin2x.

2) $(T):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\Leftrightarrow y^2=9\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$ *ou* $y=-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$

$\Leftrightarrow M(x,y)\in\zeta_h$ *ou* $M(x,y)\in S_{(O,\vec{i})}(\zeta_h)$ avec $h(x)=\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$ C_h sa courbe

représentative. $h'(x)=\frac{-3}{2}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $\lim\limits_{2^-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=\lim\limits_{2^-}\frac{4-x^2}{(x-2)\sqrt{4-x^2}}=\lim\limits_{2^-}\frac{-2-x}{-\sqrt{4-x^2}}=-\infty.\Rightarrow\zeta_h$ admet

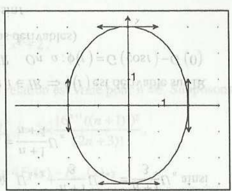
une demi tangente verticale au point $A(2,0)$.



b) Soit D le domaine du plan limité par ζ_h, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 2. Donc A = 4 A (D) =

$4\int_0^1 h(t)dt=4\int_0^1\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=6\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$.=

$6\int_0^{2\sin\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-x^2}\,dx=6F\left(\frac{\pi}{6}\right)=6\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(u\,a)$.



Exercice 18: a) $h:t\mapsto\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est une fonction continue sur

$\mathbb{R}_+$; on pose G une primitive de h sur $\mathbb{R}$ Donc $f(x)=G(2x)-G(x)$. La fonction $x\mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

et $f'(x)=2G'(2x)-G'(x)=2h(2x)-h(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1+8x^3}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

b) $f'(x)=\frac{3-4x^3}{\sqrt{1+8x^3}\left(\sqrt{1+x^3}\right)\left(2\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+8x^3}\right)}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3-4x^3=0\Leftrightarrow x^3=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$. Pour tout $x\in[0,\alpha]$, $f'(x)\ge 0$ donc f est croissante sur

$[0,\alpha]\Rightarrow f(x)\le f(\alpha)$. Pour tout $x\in[\alpha,+\infty[$, $f'(x)\le 0$ donc f est décroissante sur

$[\alpha,+\infty[\ \Rightarrow f(x)\ge f(\alpha)$ .Donc f admet un maximum en α.

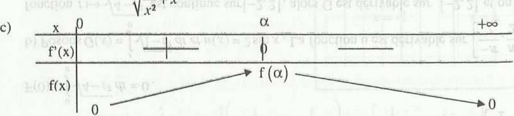
2)a) On a $h:t\mapsto\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+\Rightarrow h(2x)\le h(2t)\le h(x)$ pour

$x\le t\le 2x\Rightarrow\int_x^{2x}h(2x)dt\le\int_x^{2x}h(t)dt\le\int_x^{2x}h(x)dt\Leftrightarrow xh(2x)\le f(x)\le xh(x)$

$\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{1+8x^3}}\le f(x)\le\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\ \forall x\in\mathbb{R}_+$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+x}}=0$ de même $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+8x^3}}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

c)



3) a) h est décroissante sur $[0,+\infty[$, $k+n\le t\le k+1+n\Rightarrow h(k+1+n)\le h(t)\le h(k+n)$.

En intégrant, on aura :

$\int_{k+n}^{k+1+n}h(k+1+n)dt\le\int_{k+n}^{k+1+n}h(t)dt\le\int_{k+n}^{k+1+n}h(k+n)dt\Rightarrow h(k+1+n)\le\int_{k+n}^{k+1+n}h(t)dt\le h(k+n)\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

b) On a : pour k = 0 ; $h(1+n)\le\int_n^{n+1}h(t)dt\le h(n)$

pour k = 1 ; $h(2+n)\le\int_{1+n}^{2+n}h(t)dt\le h(1+n)$

. . . .

Pour k = n-1 ; $h(2n)\le\int_{2n-1}^{2n}h(t)dt\le h(2n-1)$.

On somme membre à membre ces inégalités et après simplification , on obtient :

$h(1+n)+h(2+n)+...+h(2n)\le\int_n^{2n}h(t)dt\le h(n)+h(1+n)+...+h(2n-1).\Rightarrow S_n-h(n)\le f(n)\le S_n-h(2n)$.

Ainsi $f(n)+h(2n)\le S_n\le h(n)+f(n)$.

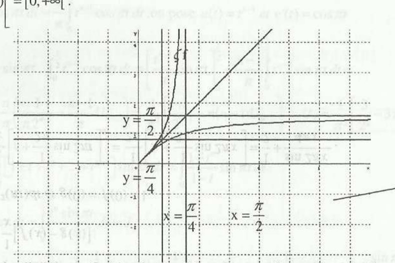
c) $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)+h(2n)\le\lim\limits_{n\to+\infty}S_n\le\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)+h(n)\ \Rightarrow 0\le\lim\limits_{n\to+\infty}S_n\le 0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=0$.

Exercice 19: 1) a) $x\to\tan^2 x$ définie , continue et dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, donc f est continue et dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. $f'(x)=2\tan x(1+\tan^2 x)\ge 0$ pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi f est strictement croissante sur.

b) f est continue strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur

$f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left[f(0),\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)\right[=[0,+\infty[$.

c)



2) I est l'aire de la partie du plan limitée par C et les droites d'équations x = 0, x = $\frac{\pi}{4}$ et y = 0.

I = $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2x+1-1)dx=\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}(u\,a)$. Or puisque 1 unité=2cm, alors 1 u a = 4 cm² et par suite I = $4\left(1-\frac{\pi}{4}\right)cm^2$. J = $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$; J est l'aire de la partie du plan limitée par C' et les droites d'équations x = 0, x = 1 et y = 0. Par raison de symétrie par rapport à la droite y = x, J est l'aire de la partie du plan limitée par C = $S_{(y=x)}(C')$ et les droites d'équations $y=0=S_{(y=x)}(x=0)$,

$y=\frac{\pi}{4}=S_{(y=x)}(x=1)\;et\;x=0=S_{(y=x)}(y=0)$ (toute symétrie orthogonale conserve les mesures d'aires).

$I+J=\frac{\pi}{4}\times1=\frac{\pi}{4}\Rightarrow J=\frac{\pi}{4}-I=\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-1(u\,a)\Rightarrow J=4\left(\frac{\pi}{2}-1\right)cm^2$.

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f^2(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^4x+\tan^2x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2x)\tan^2x\,dx=\left[\frac{1}{3}\tan^3x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3}\tan^3\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$

$\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\left[\frac{1}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx\right]=\pi\left[\frac{1}{3}-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)$

; $V=\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)$ (unité de volume) = $8\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)cm^3$.

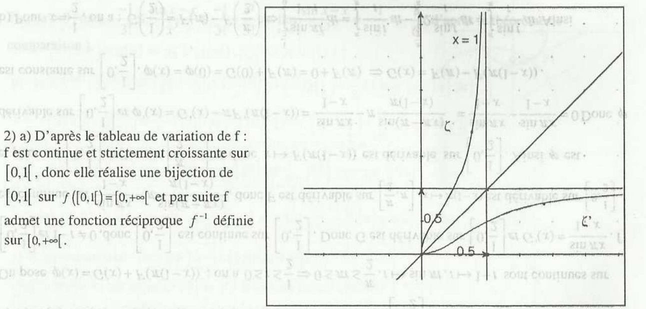
Exercice 20 :

1)a) Soit $x\in]0,1[\;et\;\varphi(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$, $\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=+\infty$ et donc f n'est pas dérivable à droite en 0 et ζ_f admet au point d'abscisse 0 une demi tangente verticale dirigée vers le haut.

b) La fonction $x\mapsto\frac{x}{1-x}$ est dérivable et strictement positive sur $]0,1[$ et par suite f est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x\in]0,1[:f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}=\frac{1}{2(1-x)\sqrt{1-x}\sqrt{x}}$

c) $f'(x)>0$ sur $]0,1[$ et f est continue sur $[0,1[$, alors f est strictement croissante sur $[0,1[$.

$\lim_{1^-}f(x)=+\infty$: la droite (x = 1) est une asymptote verticale à ζ_f.



2) a) D'après le tableau de variation de f : f est continue et strictement croissante sur $[0,1[$, donc elle réalise une bijection de $[0,1[$ sur $f([0,1[)=[0,+\infty[$ et par suite f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0,+\infty[$.

b) $f^{-1}:\mathbb{R}_+\to[0,1[,\;x\mapsto f^{-1}(x)=y$.

$f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{y}{1-y}}\Leftrightarrow x^2=\frac{y}{1-y}\Leftrightarrow y=\frac{x^2}{1+x^2}$. D'où

$f^{-1}(x)=\frac{x^2}{1+x^2}\;\forall x\in\mathbb{R}_+$. $D'=S_\Delta(D)$, $S_\Delta(C)=C'$, $S_\Delta((x=0))=(y=0)\;et\;S_\Delta((y=1))=(x=1)\Rightarrow D'$ est le domaine limité par C', $(O,\vec{i})$ et les droites (x = 0)et (x = 1). Or S_Δ conserve les mesures d'aires, donc

$A=\int_0^1 f^{-1}(x)\,dx=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$.

3) Soit $h(t)=\frac{1}{1+t^2}$ et u(x) = $tg\left(\frac{x}{2}\right)$, u est dérivable sur $]-\pi,\pi[$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$, $0\in\mathbb{R}$ et si $x\in]-\pi,\pi[\Rightarrow tg\left(\frac{x}{2}\right)\in\mathbb{R}$, alors F est dérivable sur $]-\pi,\pi[$ et

$F'(x)=\frac{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2}\times\frac{1}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}$.Par suite $F(x)=\frac{x}{2}+c,c\in\mathbb{R}$.Or on a $F(0)=0\Rightarrow c=0$

et donc $F(x)=\frac{x}{2}$.

$\left[0,\frac{1}{2}\right]\;et\;\varphi'(x)=G'(x)-\pi F'(\pi(1-x))$.

c) A = $\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=1-I=1-\frac{\pi}{4}$.

Exercice 21 : 1) f est continue sur $\mathbb{R}_+$, alors il existe une unique primitive F de f qui s'annule en 0, définie par : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et F'(x) = f(x).

D'où g(x) = $\frac{F(x)}{x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$; $x\mapsto F(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto x$ est aussi continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)}{x}=\lim_{0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(0)=f(0)=g(0)$.

Donc g est continue en 0 et par suite g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) $x\mapsto F(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $x\mapsto\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ $et\;g'(x)=\frac{F'(x)x-F(x)}{x^2}=\frac{1}{x}[f(x)-g(x)]$.

3) Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\cos^2(\pi t)dt\;et\;g(0)=f(0)=1$.

$g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1+\cos2\pi t}{2}dt=\frac{1}{2x}\left[t+\frac{1}{2\pi}\sin2\pi t\right]_0^x=\frac{1}{2x}\left[x+\frac{1}{2\pi}\sin2\pi x\right]=\frac{1}{2}+\frac{\sin2\pi x}{4\pi x}$.

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{\sin2\pi x}{4\pi x} & si\;x>0\\ g(0)=1\end{cases}$$

Exercice 22 : 1) a) $t\mapsto\sin t\;et\;t\mapsto t$ sont deux fonctions continues sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\;et\;t\neq0\;\forall t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, donc f est continue sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ et par suite I est bien défini. I est l'aire de la partie du plan limitée par ζ_f et les droites d'équations $(x=\pi)$, $\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$ et (y = 0).

b) $\frac{\pi}{2}\le t\le\pi\Rightarrow\frac{1}{\pi}\le\frac{1}{t}\le\frac{2}{\pi}$ et comme $\sin t\ge0$; $\forall t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, alors $\frac{\sin t}{\pi}\le\frac{\sin t}{t}\le\frac{2\sin t}{\pi}$. Ces fonctions sont continues sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\Rightarrow\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin t}{\pi}dt\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin t}{t}\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{2\sin t}{\pi}dt\Rightarrow\left[\frac{-\cos t}{\pi}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\le I\le\left[\frac{-2\cos t}{\pi}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Rightarrow\frac{1}{\pi}\le I\le\frac{2}{\pi}$.

2) a) $G(x)=F(\pi)-F(\pi(1-x))\Leftrightarrow G(x)+F(\pi(1-x))=F(\pi),\;x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

On pose $\varphi(x)=G(x)+F(\pi(1-x))$; on a $0\le t\le\frac{1}{2}\Rightarrow0\le\pi t\le\frac{\pi}{2}$. $t\mapsto\sin\pi t$, $t\mapsto1-t$ sont continues sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]\;et\;1-t\neq0$,donc $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ est continue sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Donc G est dérivable sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]\;et\;G'(x)=\frac{\sin\pi x}{1-x}$. f est continue sur $\frac{\sin\pi x}{1-x}-\pi\frac{\sin(\pi-\pi x)}{\pi(1-x)}$, donc F est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. $x\mapsto\pi(1-x)$ est dérivable sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et pour $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\pi(1-x)\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ et donc $x\mapsto F(\pi(1-x))$ est dérivable sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Ainsi φ est dérivable sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]\;et\;\varphi'(x)=G'(x)-\pi F'(\pi(1-x))=\frac{\sin\pi x}{1-x}-\pi\frac{\sin(\pi-\pi x)}{\pi(1-x)}=\frac{\sin\pi x}{1-x}-\frac{\sin\pi x}{1-x}=0$ Donc φ est constante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\varphi(x)=\varphi(0)=G(0)+F(\pi)=0+F(\pi)\Rightarrow G(x)=F(\pi)-F(\pi(1-x))$.

b) Pour $x=\frac{1}{2}$, on a : $G\left(\frac{1}{2}\right)=F(\pi)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin\pi t}{1-t}dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\frac{\sin t}{t}dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt$.Ainsi

$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin\pi t}{1-t}dt$.

3) a) $U_0=\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\pi t\,dt=\left[\frac{-1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\pi}$,on pose $u(t)=t\;et\;v'(t)=\sin\pi t\Rightarrow u'(t)=1\;et\;v(t)=\frac{-1}{\pi}\cos\pi t$.

$U_1=\left[\frac{-t}{\pi}\cos\pi t\right]_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\pi t\,dt=0+\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\pi^2}$.

b) $U_n=\int_0^{\frac{1}{2}} t^n \sin \pi t\, dt$, on pose $u(t)=t^n$ et $v'(t)=\sin \pi t \Rightarrow u'(t)=nt^{n-1}$ et $v(t)=\frac{-1}{\pi}\cos \pi t$.

$U_n=\left[-\frac{t^n}{\pi}\cos \pi t\right]_0^{\frac{1}{2}}+\frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-1}\cos \pi t\, dt=\frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-1}\cos \pi t\, dt$,on pose $u(t)=t^{n-1}$ et $v'(t)=\cos \pi t$

$\Rightarrow u'(t)=(n-1)t^{n-2}$ et $v(t)=\frac{1}{\pi}\sin \pi t$. $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-1}\cos \pi t\, dt=\left[\frac{t^{n-1}}{\pi}\sin \pi t\right]_0^{\frac{1}{2}}-\frac{n-1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-2}\sin \pi t\, dt=$

$\frac{1}{\pi 2^{n-1}}-\frac{n-1}{\pi}U_{n-2}$. Donc $U_n=\frac{n}{\pi}\left(\frac{1}{\pi 2^{n-1}}-\frac{n-1}{\pi}U_{n-2}\right)=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{n}{2^{n-1}}-n(n-1)U_{n-2}\right]$; $U_3=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{3}{2^2}-3\times 2\times U_1\right]$.

4)a) $S_n=U_0+U_1+...+U_{n-1}=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[1+t+t^2+...+t^{n-1}\right]\sin \pi t\, dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-t^n}{1-t}\sin \pi t\, dt$.

$\Rightarrow I-S_n=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin \pi t}{1-t}-\frac{1-t^n}{1-t}\sin \pi t\, dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^n \sin \pi t}{1-t}dt=J_n$.

b) $0\le t\le\frac{1}{2}\Rightarrow 0\le \pi t\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0\le \sin \pi t\le 1$; $-\frac{1}{2}\le -t\le 0\Rightarrow\frac{1}{2}\le 1-t\le 1\Rightarrow 1\le\frac{1}{1-t}\le 2$. $\Rightarrow 0\le\frac{\sin \pi t}{1-t}\le 2$.

On obtient $0\le\frac{t^n \sin \pi t}{1-t}\le 2t^n\ \forall t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ (*). Comme ces fonctions sont continues , alors

$0\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^n \sin \pi t}{1-t}dt\le\int_0^{\frac{1}{2}}2t^n\, dt=2\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{n+1}\frac{1}{2^n}\le\frac{1}{n+1}.\Rightarrow J_n\le\frac{1}{n+1}$.

c) D'après (*), on a $0\le\frac{t^n \sin \pi t}{1-t}\Rightarrow 0\le J_n$. Ainsi , on a : $0\le J_n\le\frac{1}{n+1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}J_n=0$.

$I-S_n=J_n\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}(I-S_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}J_n=0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=I$.

Exercice 23:

1) $\int_0^x \cos t\, dt=\left[\sin t\right]_0^x=\sin x-\sin 0=\sin x$.

$1-\int_0^x \sin t\, dt=1-\left[-\cos t\right]_0^x=1-(-\cos x+\cos 0)=\cos x$.

2)a) On a : pour $t\in\mathbb{R}_+$, $\cos t\le 1\Rightarrow\int_0^x \cos t\, dt\le\int_0^x 1dt\Leftrightarrow\sin x\le x\ \forall x\in\mathbb{R}_+$ .Or on a : $\cos x=1-\int_0^x \sin t\, dt$

Or $\sin t\le t\Rightarrow\int_0^x \sin t\, dt\le\int_0^x t\, dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=\frac{x^2}{2}.\Rightarrow 1-\int_0^x \sin t\, dt\ge 1-\frac{x^2}{2}\Rightarrow\cos x\ge 1-\frac{x^2}{2}$.

b) On a $\forall t>0:\cos t\ge 1-\frac{t^2}{2!}\Rightarrow\int_0^x \cos t\, dt\ge\int_0^x\left(1-\frac{t^2}{2}\right)dt$ pour tout $x\ge 0.\Rightarrow\sin x\ge\left[t-\frac{t^3}{3!}\right]_0^x=x-\frac{x^3}{3!}\ \forall x\ge 0$.

On a $\sin t\ge t-\frac{t^3}{3!}\Rightarrow\int_0^x \sin t\, dt\ge\int_0^x\left(t-\frac{t^3}{3!}\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{4!}\right]_0^x=\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}$;

$1-\int_0^x \sin t\, dt\le 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\Rightarrow\cos x\le 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$.

3) D'après 2) b) $\sin x\ge x-\frac{x^3}{3!}\Rightarrow\sin x-x\ge-\frac{x^3}{3!}$ (1).

De même d'après 2)b) :

on a : $\cos t-1\le-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}\Rightarrow\int_0^x(\cos t-1)dt\le\int_0^x\left(\frac{-t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}\right)dt\Rightarrow\sin x-x\le-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$ (2).

(1) et (2) donnent : $-\frac{x^3}{3!}\le\sin x-x\le-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$.

Pour $x>0$, on a : $\frac{-1}{3!}\le\frac{\sin x-x}{x^3}\le\frac{-1}{3!}+\frac{x^2}{5!}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}$ (d'après le théorème de comparaison).

****

SOLUTION DES EXERCICES RELATIFS AU CHAPITRE

****

Exercise N° 1 : 1) b); 2) c); 3) b) ; 4) d) ; 5) b) ,6) b) ; 7) a) ,8) c) , 9) b) ; 10) a) ; 11) c) ; 12) a); 13) c).

Exercice N° 2 :1) a) et c) ; 2) b) et d) ; 3) a) et c) ; 4) b) et d)

Exercice N° 3 :1) Faux ; 2) Vrai ; 3) Faux ; 4) Vrai ; 5) Vrai

Exercice N° 4 :1) Soit $\Delta:\{M(z)\in P$ tel que : $|z-1|=|z-i|\}$; $M\in\Delta\Leftrightarrow|z-1|=|z-i|\Leftrightarrow AM=BM$ avec $A(1)$; $B(i)\Leftrightarrow M\in med[AB]$ donc $\Delta=med[AB]$

2) z solution de $(E)\Leftrightarrow(z-1)^n=-i(z-i)^n\Rightarrow|z-1|^n=|z-i|^n\Rightarrow|z-1|=|z-i|\Rightarrow M\in\Delta$

Exercice N° 5 :1) $|z'|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|(1-i)z-1|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|(1-i)|\left|z-\frac{1}{1-i}\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}\left|z-\left(\frac{1+i}{2}\right)\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\left|z-\left(\frac{1+i}{2}\right)\right|=1\Leftrightarrow BM=1$; $\left(B\left(\frac{1+i}{2}\right)\right)\Leftrightarrow M\in\zeta(B;1)$. Donc l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z'|=\sqrt{2}$ est $\zeta(B;1)$.

2) a) $AM'=|z'-i|=|(1-i)z-(i+1)|=|1-i||z-i|=\sqrt{2}|z-i|$; $AM=|z-i|$; $MM'=|(1-i)z-1-z|$ $=|-i||z-i|=|z-i|$ $=|z-iz-1-z|=|-iz-1|$ Alors le triangle AMM' est un triangle et rectangle isocèle en M.

b) $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}\right)\equiv\arg\left(\frac{z'-i}{z-i}\right)[2\pi]\equiv\arg\left((1-i)\left(\frac{z-i}{z-i}\right)\right)[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

c) M un point du plan alors le point e f (M) = M'st le sommet du triangle AMM' rectangle et isocèle en M de sens indirect car (AMM' est un triangle et rectangle isocèle en M. et $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$)

3) Soit $E=\left\{M(z)\in P\ ;\ \arg(z')\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$ il faut que $z'\neq 0\Rightarrow z\neq\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{2}\Rightarrow M\neq B$;

$M\in E\Leftrightarrow\arg z'\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]\Leftrightarrow\arg\left[(1-i)z-1\right]\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\Leftrightarrow\arg\left[(1-i)\left(z-\frac{1+i}{2}\right)\right]\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\Leftrightarrow\arg(1-i)+\arg\left(z-\frac{1+i}{2}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]\Leftrightarrow-\frac{\pi}{4}+\arg(z_M-z_B)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

avec $B\left(\frac{1+i}{2}\right)$, $\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)\equiv 0[2\pi]\Leftrightarrow M\in[BK]$ tel que : $K\left(1+\frac{1}{2}i\right)$ Or $M\neq B\Rightarrow E=[BK)/\{B\}$

Exercice N° 6: 1) $z'=\frac{i\bar{z}+1}{\bar{z}+i}$. Soit M un point invariant,

$f(M)=M\Leftrightarrow z=z'$.

On pose $z=x+iy$, $z=\frac{i\bar{z}+1}{\bar{z}+i}\Leftrightarrow z(\bar{z}+i)=i\bar{z}+1\Leftrightarrow z\bar{z}+zi=i\bar{z}+1$

$\Leftrightarrow z\bar{z}+zi-i\bar{z}-1=0\Leftrightarrow z\bar{z}+zi-i\bar{z}=1\Leftrightarrow|z|^2+i(x+iy-x+iy)=1\Leftrightarrow x^2+y^2+i(2iy)=1$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2y=1\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{2}$. L'ensemble des points invariants est le cercle de centre $A(O;1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

2) On a $M\neq A$; $\frac{aff\left(\overrightarrow{AM'}\right)}{aff\left(\overrightarrow{AM}\right)}=\frac{z'-z_A}{z_M-z_A}=\frac{\frac{i\bar{z}+1}{\bar{z}+i}-i}{z-i}=\frac{\frac{i\bar{z}+1-i\bar{z}+1}{\bar{z}+i}}{z-i}=\frac{2}{(\bar{z}+i)(z-i)}=\frac{2}{|z-i|^2}$.

Or $|z-i|^2\in IR_+^*$. Donc $\frac{aff\left(\overrightarrow{AM'}\right)}{aff\left(\overrightarrow{AM}\right)}\in IR$. $\frac{aff\left(\overrightarrow{AM'}\right)}{aff\left(\overrightarrow{AM}\right)}=\alpha\in IR_+^*\Leftrightarrow aff\left(\overrightarrow{AM'}\right)=\alpha aff\left(\overrightarrow{AM}\right)$. Donc

$\overrightarrow{AM'}=\alpha\overrightarrow{AM}$ et par suite A ; M et M' sont trois points alignés.

3) a) Montrons que : $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}\right)[2\pi]$.

$\left(\vec{u};\overrightarrow{OM'}\right)\equiv\arg(z')[2\pi]\equiv\arg\left(\frac{i\bar{z}+1}{\bar{z}+i}\right)[2\pi]\equiv\arg\left[(i)\frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}\right][2\pi]\equiv\arg(i)+\arg\left(\frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}\right)[2\pi]$

$\equiv\frac{\pi}{2}-\arg\left(\overline{\frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}-\arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right)[2\pi]\equiv\equiv\frac{\pi}{2}-\arg\left(\frac{z_M-z_B}{z_M-z_A}\right)[2\pi]$

$\equiv\frac{\pi}{2}-\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}\right)[2\pi]$. Donc $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}\right)[2\pi]$

b) $M\in\zeta_{[AB]}/\{A,B\}\Rightarrow\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\Leftrightarrow\left(\vec{u};\overrightarrow{OM'}\right)=\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}\right)+[2\pi]$

donc $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM'}\right)\equiv\pi[\pi]\Rightarrow M'\in(OM)/\{O\}\Rightarrow M'\in(O,\vec{u})$.

c) $M\in\xi_{[AB]}$ donc $M'\in(O,\vec{u})$; A ; M et M' sont alignés donc $M'\in(O,\vec{u})\cap(AM)$.

Étape de construction : On marque un point $M\in\xi_{[AB]}/\{A,B\}$

$\{M'\}=(O,\vec{u})\cap(AM)$.

Exercice N° 7 :1) a) $f(M)=M\Leftrightarrow z'=z$ et $z\neq\frac{1+i}{2}\Leftrightarrow z^2-(1+i)z+i=0$ et $z\neq\frac{1+i}{2}\Leftrightarrow z=1$ ou $z=i$

car $\Delta=(1+i)^2-4i=1+2i-1-4i=-2i=(1-i)^2$; $z'=\frac{(1+i)-(1-i)}{2}=i$; $z''=\frac{(1+i)+(1-i)}{2}=1$

Donc $A(1)$ et $B(i)$ sont les seuls points invariants par f.

b) $f(M)=I$ et $M\neq I \Leftrightarrow \dfrac{z^2-i}{2z-(1+i)}=\dfrac{1+i}{2} \Leftrightarrow z^2-i=z(1+i)-i \Leftrightarrow z^2-z(1+i)=0$

$\Leftrightarrow z(z-(1+i))=0 \Rightarrow z=0$ ou $z=1+i$ $M=O$ ou $M=C(1+i)$

2) a) $z\in\mathbb{C}/\left\{1\,;\,\dfrac{1+i}{2}\right\}$; $\dfrac{z'-1}{z'-1}=\dfrac{\dfrac{z^2-i}{2z-(1+i)}-i}{\dfrac{z^2-i}{2z-(1+i)}-1}=\dfrac{z^2-2iz+i^2}{z^2-2z+1}=\dfrac{(z-i)^2}{(z-1)^2}=\left(\dfrac{z-i}{z-1}\right)^2$

b) $\dfrac{z'-i}{z'-1}=\left(\dfrac{z-i}{z-1}\right)^2 \Rightarrow \left|\dfrac{z'-i}{z'-1}\right|=\left|\dfrac{z-i}{z-1}\right|^2$ et $\arg\left(\dfrac{z'-i}{z'-1}\right)\equiv\arg\left(\dfrac{z-i}{z-1}\right)^2[2\pi]$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{z'-i}{z'-1}\right|=\left|\dfrac{z-i}{z-1}\right|^2$ et $\arg\left(\dfrac{z'-i}{z'-1}\right)\equiv 2\arg\left(\dfrac{z-i}{z-1}\right)[2\pi]$

donc $\dfrac{BM'}{AM'}=\left(\dfrac{BM}{AM}\right)^2$ et $\left(\overrightarrow{AM'};\overrightarrow{BM'}\right)\equiv 2\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)[2\pi]$

c) M est un point du cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)\equiv\pi+k\pi \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)\equiv\pi[2\pi]$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM'};\overrightarrow{BM'}\right)\equiv\pi[2\pi] \Leftrightarrow M'\in[AB]/\{A;B\}$ donc M' décrit le segment $[AB]$ privé des points A et B.

3) a) $\Delta=\text{med}[AB]$; si $M\in\Delta/\{I\} \Rightarrow \dfrac{BM}{AM}=1 \Leftrightarrow \dfrac{BM^2}{AM^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{BM'}{AM'}=1$; $M'\in\Delta$

b) On a $M'\in\Delta$ et $\left(\overrightarrow{M'A};\overrightarrow{M'B}\right)=2\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)[2\pi]$ donc M' est le centre de cercle circonscrit au triangle ABM.

étape de construction :

Soit $M\in\Delta/\{I\}$; on trace $\Delta'=\text{med}[AM]$; $\{M'\}=\Delta\cap\Delta'$

Exercice 8: 1) Soit M un point invariant par f.

$f(M)=M \Leftrightarrow z=\dfrac{i\bar{z}-2}{\bar{z}+i} \Leftrightarrow z(\bar{z}+i)=i\bar{z}-2 \Leftrightarrow z\bar{z}+i(z-\bar{z})=-2$ On pose $z=x+iy$;

$x^2+y^2+i(2iy)=-2 \Leftrightarrow x^2+y^2+2+2iy=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2y=-2 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2+1=0$ impossible donc f n'admet aucun point invariant.

2) $f:P/\{A\}\to P/\{A\}$; $M(z)\mapsto M'(z')$. Soit $M'\in P/\{A\}$; montrons qu'il existe un unique point $M\in P/\{A\}$ tel que : $f(M)=M'$, $z'=\dfrac{i\bar{z}-2}{\bar{z}+i} \Leftrightarrow z'(\bar{z}+i)=i\bar{z}-2 \Leftrightarrow z'\bar{z}+iz'=i\bar{z}-2 \Leftrightarrow \bar{z}(z'-i)=-2-iz'$

Or $M'\in P/\{A\} \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{-2-iz'}{z'-i} \Leftrightarrow z=\dfrac{-2+i\bar{z'}}{\bar{z'}+i}$ donc il existe un point $M\in P/\{A\}$ tel que $f(M)=M'$

et $f^{-1}:(M(z))\mapsto M'(z')$ tel que : $z'=\dfrac{-2+i\bar{z}}{\bar{z}+i}$. Donc f est bijective et $f^{-1}(M)=f(M)$

3) a) $\dfrac{\bar{z'}-i}{z-i}=\dfrac{\dfrac{i\bar{z}-2}{\bar{z}+i}-i}{z-i}=\dfrac{i\bar{z}-2-i\bar{z}+1}{(z-i)(\bar{z}+i)}=\dfrac{-1}{|z-i|^2}$ car $\forall\ \lambda\in\mathbb{C}$; $\lambda\bar{\lambda}=|\lambda|^2$

b) $\left|\dfrac{z'-i}{z-i}\right|=\left|\dfrac{-1}{|z-i|^2}\right| \Leftrightarrow \dfrac{|z'-i|}{|z-i|}=\dfrac{1}{|z-i|^2} \Rightarrow \dfrac{AM'}{AM}=\dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AM'.AM=1$. Montrons que $A\in[MM']$.

$\dfrac{\text{aff}\,\overrightarrow{AM'}}{\text{aff}\,\overrightarrow{AM}}=\dfrac{-1}{|z-i|^2} \Leftrightarrow \text{aff}\,\overrightarrow{AM'}=\dfrac{-1}{|z-i|^2}\text{aff}\,\overrightarrow{AM}$ Or $\dfrac{-1}{|z-i|^2}\in\mathbb{R}^*_-$ donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires de sens contraire.

2ième méthode : $\arg\left(\dfrac{z'-i}{z-i}\right)\equiv\arg\left(-\dfrac{1}{|z-i|^2}\right)[2\pi]\equiv\pi[2\pi]$; $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}\right)\equiv\pi[2\pi]\Rightarrow A\in[MM']$

c) $M\in\xi_{(A;2)} \Leftrightarrow AM=2 \Leftrightarrow 2\times AM'=1 \Leftrightarrow AM'=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow M'\in\zeta_{\left(A;\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow f(\xi)=\zeta_{\left(A;\frac{1}{2}\right)}$

d) On marque un point M sur $\xi_{(A;1)}$; on trace $\xi'=\xi_{\left(A;\frac{1}{2}\right)}$

M' est le point d'intersection de ξ' avec (AM)

4) $f(M)=M'$; $M\in\xi_{(O;1)} \Leftrightarrow OM=1 \Leftrightarrow |z|=1 \Leftrightarrow z\bar{z}=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{1}{z}$

On a $M'A=|z'-i|=\left|\dfrac{i\bar{z}-2}{\bar{z}+i}-i\right|=\left|\dfrac{i\bar{z}-2-i\bar{z}+1}{\bar{z}+i}\right|=\left|\dfrac{-1}{\bar{z}+i}\right|=\dfrac{1}{|\bar{z}+i|}$ $(\oplus)$

et $M'B=|z'-2i|=\left|\dfrac{i\bar{z}-2}{\bar{z}+i}-\dfrac{2i(\bar{z}+i)}{\bar{z}+i}\right|=\left|\dfrac{-i\bar{z}}{\bar{z}+i}\right|=\dfrac{|i||\bar{z}|}{|\bar{z}+i|}=\dfrac{|\bar{z}|}{|\bar{z}+i|}=\dfrac{1}{|\bar{z}+i|}$ car : $|z|=1$ $(\otimes)$

d'après $\oplus$ et $\otimes$ On a $M'A=M'B$; $M\in\xi\Rightarrow M'A=M'B\Rightarrow M'\in\text{med}[AB]$

. Donc l'image de cercle de centre O et de rayon 1 est la médiatrice de $[AB]$

b) $N\in\xi_{(O;1)}/\{A\} \Leftrightarrow f(N)=N'\in\text{med}[AB]$; Or $A\in[NN']$ d'après 3) a)

on prend N sur $\xi_{(O;1)}/\{A\}$; la médiatrice de $[AB]$ coupe (NA) en N'.

Exercice N° 9 : 1) $p=\dfrac{|a|}{a}$; $q=\dfrac{|b|}{b}$; $r=\dfrac{|c|}{c}$: $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$

a) $\overrightarrow{PH}.\overrightarrow{QR}=\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OH}\right)\left(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR}\right)=\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\right)\left(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR}\right)=\left(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\right)\left(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}\right)$

$=OR^2-OQ^2=|a|^2-|q|^2=\left(\dfrac{|c|}{|c|}\right)^2-\left(\dfrac{|b|}{|b|}\right)^2=1-1=0$ d'où : $\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{QR}$ (1) ; $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{PR}=0$ d'où $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{PR}$ (2)

Donc d'après (1) et (2) On obtient H est l'orthocentre de PQR.

b) Remarquons que O est le centre de cercle circonscrit au triangle PQR ; $OP=OQ=OR=1$, PQR est équilatéral $\Leftrightarrow O=H \Leftrightarrow \overrightarrow{OH}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=\vec{0} \Leftrightarrow p+q+r=0$. Donc PQR est équilatéral si et seulement si $p+q+r=0$.

2) a) On a : $S_2=|p(z-a)+q(z-b)+r(z-c)|\leq|p(z-a)|+|q(z-b)|+|r(z-c)|$

$\leq|p||z-a|+|q||z-b|+|r||z-c|\leq|z-a|+|z-b|+|z-c|\leq S_1$ car $|p|=|q|=|r|=1$, D'où $S_2\leq S_1$

$S_2=|p(z-a)+q(z-b)+r(z-c)|=|pz-pa+qz-qb+rz-rc|=|z(p+q+r)-pa-qb-rc|$

$=|-pa-qb-rc|=\left|-\dfrac{|a|}{a}a-\dfrac{|b|}{b}b-\dfrac{|c|}{c}c\right|=\big|-|a|-|b|-|c|\big|=\big||a|+|b|+|c|\big|=|a|+|b|+|c|$. Or $S_2\leq S_1$ donc

$|z-a|+|z-b|+|z-c|\geq|a|+|b|+|c|$.

b) D'après 2) a) ; $MA+MB+MC\geq OA+OB+OC$ donc $MA+MB+MC$ est minimale pour $M=O$

Exercice N° 10 : 1) On pose $z=x+iy$ $A(1)$; $M(z)$ et $M'(1+z^2)$

$\text{Aff}(\overrightarrow{AM})=z-1=x-1+iy\Rightarrow\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}$; $\text{aff}\left(\overrightarrow{AM'}\right)=1+z^2-1=z^2=x^2-y^2+2ixy \Rightarrow \overrightarrow{AM'}\begin{pmatrix}x^2-y^2\\2xy\end{pmatrix}$

A ; M et M' alignés $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-1 & x^2-y^2\\ y & 2xy\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-1)2xy-y(x^2-y^2)=0 \Leftrightarrow y\left[2x^2-2x-(x^2-y^2)\right]=0$

$\Leftrightarrow y(x^2+y^2-2x)=0 \Leftrightarrow y=0$ ou $(x-1)^2+y^2=1$ donc l'ensemble recherché est $(O,\vec{u})\cup\xi_{(A,1)}$

2) $A(i)$; $M(z)$ et $M'(iz)$; AMM' est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow AM=MM'=AM'$

$\Leftrightarrow|z-i|=|iz-z|=|iz-i| \Leftrightarrow \begin{cases}|z-i|=|iz-z|\\|z-i|=|iz-i|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|z-i|=\sqrt{2}|z|\\|z-i|=|z-1|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|z-i|^2=2|z|^2\\|z-i|^2=|z-1|^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(z-i)(\bar{z}+i)=2z\bar{z}\\(z-i)(\bar{z}+i)=(z-1)(\bar{z}-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z\bar{z}+iz-i\bar{z}+1=2z\bar{z}\\z\bar{z}+iz-i\bar{z}+1=z\bar{z}-z-\bar{z}+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z\bar{z}-i(z-\bar{z})=1\\z+\bar{z}+i(z-\bar{z})=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-i(2iy)=1\\2x+i(2iy)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2+2y-1=0\\x=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+2x-1=0\\x=y\end{cases}$; $2x^2+2x-1=0$;

$\Delta=12$; $x'=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$; $x''=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ $S_c=\left\{B\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}+i\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right);\ C\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}+i\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right\}$

Exercice N° 11 : $z'=\dfrac{iz+2}{z-i}$ avec $(z\neq i)$

1) a) $M(z)$ est invariant par f $\Leftrightarrow f(M)=M \Leftrightarrow z'=z \Leftrightarrow z=\dfrac{iz+2}{z-i} \Leftrightarrow z(z-i)=iz+2 \Leftrightarrow z^2-iz=iz+2$

$\Leftrightarrow z^2-2iz-2=0$; $\Delta'=i^2+2=-1+2=1$ $z_1=i-1$; $z_2=i+1$. Les points invariants sont I et J tel que : $I(i-1)$ et $J(i+1)$

b) $\dfrac{z_I}{z_J}=\dfrac{i-1}{i+1}=\dfrac{-1+i}{1+i}=i \Leftrightarrow \overrightarrow{OI}\perp\overrightarrow{OJ}$ (1) ; $\dfrac{z_I}{z_J}=i\Rightarrow OI=OJ$ (2) car : $\left|\dfrac{z_I}{z_J}\right|=1\Rightarrow|z_I|=|z_J|$ De (1) et (2) On conclut que OIJ est un triangle rectangle isocèle en O.

2) $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM'}\right)\equiv\arg(z')[2\pi]\equiv\arg\left(\dfrac{iz+2}{z-i}\right)[2\pi]\equiv\arg(i)+\arg\left(\dfrac{z-2i}{z-i}\right)[2\pi]\equiv\dfrac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)[2\pi]$

3) a) $\begin{cases}M(z)\in\Gamma\\M\neq A\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z'\text{ est un réel}\\z\neq i\end{cases} \Leftrightarrow z'=0$ ou $\begin{cases}z'\neq0\\\arg z'\equiv0[\pi]\end{cases}$

$z'=0\Leftrightarrow z-2i=0\Leftrightarrow z=2i\Leftrightarrow B=M$ (1) $z'\neq0$

$M\neq B$ et $M\neq A$

$\arg(z')\equiv0[\pi]\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)\equiv-\dfrac{\pi}{2}[\pi]\Leftrightarrow M\in\xi_{[AB]}/\{A;B\}$ (2).

De (1) et (2) On obtient $(\Gamma)=\xi_{[AB]}/\{A\}$

b) $M(z)\in(E)\begin{cases}M\neq A\\M\neq B\end{cases}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)\equiv\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)[2\pi]\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$.

Donc (E) est l'arc $\left[\widehat{AB}\right]/\{A\,,\,B\}$ du cercle ζ tangent à $[AT)$ avec $\left(\overrightarrow{AT};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$. $\left[\widehat{AB}\right]$ est situé dans le demi plan de frontière (AB) ne contenant pas $[AT)$.

c) $M(z)\in(G)$ avec $M\neq A$ et $M\neq B\Leftrightarrow\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)\equiv0[2\pi]$;

$M\in[Bt)/\{B\}\Leftrightarrow\left(\vec{u};\overrightarrow{Bt}\right)\equiv0[2\pi]$ signifie $\vec{u}$ et $\overrightarrow{Bt}$ sont colinéaires et de même sens.

$M\in[Bt)$ avec $[Bt)//(O,\vec{u})\Rightarrow G=[Bt)/\{B\}$

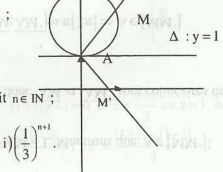
4) a) $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)\equiv\arg((z'-i)(z-i))[2\pi]$. On a : $z'-i=\dfrac{iz+2}{z-i}-i=\dfrac{iz+2-iz-1}{z-i}=\dfrac{1}{z-i}$

$\Leftrightarrow(z'-i)(z-i)=1\Rightarrow\arg((z'-i)(z-i))\equiv0[2\pi]\Rightarrow\left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)\equiv0[2\pi]$

b) $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)\equiv0[2\pi]\Leftrightarrow\left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right)\equiv-\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)[2\pi]$;

$M'=S_\Delta(M)$ avec $\Delta:y=1$; $A(0,1)$; $[AM')=S_\Delta([AM))$;

$M\in(\Gamma)\Leftrightarrow z'$ est réel $\Rightarrow M'\in(O,\vec{u})$



Exercice N° 12 : 1) $U_0=z_0-i=1-i=(1-i)\left(\dfrac{1}{3}\right)^0$: Vrai. Soit $n\in\mathbb{N}$;

supposons que $U_n=(1-i)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ et montrons que $U_{n+1}=(1-i)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$.

$U_{n+1}=z_{n+1}-i=\dfrac{1}{3}z_n+\dfrac{2}{3}i-i=\dfrac{1}{3}z_n-\dfrac{1}{3}i=\dfrac{1}{3}(z_n-i)=\dfrac{1}{3}U_n$

$=\frac{1}{3}(1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=(1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ Donc $\forall\ n\in IN ; U_n=(1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

2) a) $|U_n|=\frac{\sqrt{2}}{3^n}$ car $\sqrt{2}=|1-i|$; $\arg U_n=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) $\arg U_n=-\frac{\pi}{4}[2\pi]\Rightarrow A_n\in[Ot)/\{O\}$ tel que $(\vec{u};\overrightarrow{Ot})=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$,donc les points A_n sont alignés .

c) $z_n=U_n+i$; $\text{aff}(B_n)=\text{aff}(A_n)+i\Leftrightarrow \text{aff}(B_n)-\text{aff}(A_n)=i\Rightarrow \overrightarrow{A_nB_n}=\vec{v}$ où $\vec{v}(i)$

$\Rightarrow t_{\vec{v}}(A_n)=B_n\ \forall n\in IN$. Les points A_n sont alignés donc leurs images B_n sont alignées.

Exercice N° 13 : $S+iS'=C_{4p}^{0}-C_{4p}^{2}+C_{4p}^{4}+......+C_{4p}^{4p}+iC_{4p}^{1}-iC_{4p}^{3}+iC_{4p}^{5}-....-iC_{4p}^{4p-1}$

Or $(1+i)^{4p}=\sum_{k=0}^{4p}C_{4p}^{k}(i)^{k}=C_{4p}^{0}(1)^{4p}(i)^{0}+C_{4p}^{1}(1)^{4p-1}(i)^{1}+C_{4p}^{2}(1)^{4p-2}(i)^{2}+.....+C_{4p}^{4p}(i)^{4p}$. Or

$(1)^{2k}=(-1)^{k}$ et $(i)^{2k+1}=(i)^{2k}i=i(-1)^{k}$. Donc $1+(i)^{4p}=S+iS'$;

Or $(1+i)^{4p}=\left((1+i)^{4}\right)^{p}=\left(\left((1+i)^{2}\right)^{2}\right)^{p}=\left((2i)^{2}\right)^{p}=(-1)^{p}4^{p}$ donc $S+iS'=(-1)^{p}4^{p}$; par suite

$S=(-1)^{p}4^{p}$ et $S'=0$

Exercice N° 14 : 1) $4z^{2}-2\sqrt{3}e^{i\theta}z+e^{i2\theta}=0$; $\Delta=12e^{i2\theta}-16e^{i2\theta}=-4e^{i2\theta}=(2ie^{i\theta})^{2}$

$z_1=\frac{2\sqrt{3}e^{i\theta}+2ie^{i\theta}}{8}=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)e^{i\theta}$; $z_1=\frac{2\sqrt{3}e^{i\theta}-2ie^{i\theta}}{8}=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{4}\right)e^{i\theta}$

2) $z_1=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)e^{i\theta}$; $\frac{\sqrt{3}+i}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_1=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\theta}=\frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}$

; $z_2=\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}e^{i\theta}=\frac{1}{2}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$

3) a) $z_1=\frac{1}{2}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}$; $OM_1=|z_1|=\left|\frac{1}{2}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}\right|=\frac{1}{2}\left|e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}\right|=\frac{1}{2}$; $OM_2=|z_2|=\left|\frac{1}{2}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}\right|=\frac{1}{2}\left|e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}\right|=\frac{1}{2}$.

Donc M_1 et $M_2\in\xi_{\left(O;\frac{1}{2}\right)}$ $z_2=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{4}\right)e^{i\theta}$; $\frac{\sqrt{3}-i}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

b) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\frac{3+i\sqrt{3}+i\sqrt{3}-1}{4}=\frac{2+2i\sqrt{3}}{4}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$; $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\equiv\arg\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et comme $OM_1=OM_2$

donc OM_1M_2 est un triangle équilatéral.

4) $(\vec{u};\overrightarrow{M_1M_2})\equiv\arg(z_2-z_1)[2\pi]$; Or On a :

$z_2-z_1=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{4}\right)e^{i\theta}-\left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)e^{i\theta}=e^{i\theta}\left(\frac{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i}{4}\right)=e^{i\theta}\left(\frac{-2i}{4}\right)$

$\Rightarrow(\vec{u};\overrightarrow{M_1M_2})\equiv\arg e^{i\theta}+\arg(-i)[2\pi]\equiv\theta-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ $0\le\theta\le\pi\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}\le\theta-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\theta-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$

5) $4z^{4}-2\sqrt{3}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)z^{2}+i=0$; $E_\theta:4z^{2}-2\sqrt{3}e^{i\theta}z+e^{2i\theta}=0$. On prend $\theta=\frac{\pi}{4}$;

$E_{\frac{\pi}{4}}:4z^{2}-2\sqrt{3}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)z+i=0$. Or d'après 2) $E_{\frac{\pi}{4}}$ admet deux solutions :

$z_1=\frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$; $z_1=\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$. On pose

$z^{2}=\lambda$; $(E):4z^{4}-2\sqrt{3}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)z^{2}+i=0\Leftrightarrow4\lambda^{2}-2\sqrt{3}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\lambda+i=0$; $\Rightarrow\lambda=z_1$ ou $\lambda=z_2$

Donc les solutions de E_θ sont : $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{24}\right)}$; $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{24}\right)}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{24}\right)}$; $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{24}\right)}$

Exercice N° 15 : 1) $(E):iz^{2}+2e^{i\theta}z-2i\cos\theta e^{i\theta}=0$; $\Delta=4e^{2i\theta}-8\cos\theta e^{i\theta}=4e^{i\theta}\left[e^{i\theta}-2\cos\theta\right]$

$=4e^{i\theta}[\cos\theta+i\sin\theta-2\cos\theta]=4e^{i\theta}[-\cos\theta+i\sin\theta-]=4e^{i\theta}e^{i(\pi-\theta)}=4e^{i\theta}e^{-i\theta}e^{i\pi}=-4=(2i)^{2}$

$z'=\frac{-2e^{i\theta}-2i}{2i}=ie^{i\theta}-1$; $z''=ie^{i\theta}+1$

2) a) $z_1=1+ie^{i\theta}=1+e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$. Or on a $1+e^{i\alpha}=e^{i0}+e^{i\alpha}=e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}+e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}=e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\alpha}{2}}+e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\alpha}{2}}$

$=e^{i\frac{\alpha}{2}}\left[e^{-i\frac{\alpha}{2}}+e^{i\frac{\alpha}{2}}\right]=2e^{i\frac{\alpha}{2}}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Soit $\alpha=\theta+\frac{\pi}{2}$; $z_1=2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

or $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow0<\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$; $z_1=2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ est la forme exponentielle de z_1.

$z_2=ie^{i\theta}-1=e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}-1$. Or On a $1-e^{i\alpha}=e^{i0}-e^{i\alpha}=e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\alpha}{2}}-e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\alpha}{2}}$. On pose $\alpha=\theta+\frac{\pi}{2}$

donc $z_2=-\left(-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=2i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

$=e^{i\frac{\alpha}{2}}\left[e^{-i\frac{\alpha}{2}}-e^{i\frac{\alpha}{2}}\right]=-2i\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}=2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}$

$\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0\ \forall\ \theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow z_2=2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}$. Montrons que: $\frac{z_2}{z_1}=i\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

$\frac{z_2}{z_1}=\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}=i\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

b) $\frac{z_2}{z_1}\in iIR\Leftrightarrow\frac{\text{aff}(\overrightarrow{OM_2})}{\text{aff}(\overrightarrow{OM_1})}\in iIR\Leftrightarrow\overrightarrow{OM_1}\perp\overrightarrow{OM_2}$ donc OM_1M_2 est rectangle en O.

OM_1M_2 est isocèle en O $\Leftrightarrow OM_1=OM_2$;

$\Leftrightarrow|z_1|=|z_2|\Leftrightarrow2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ et comme $\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

$\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\theta=0$

3) a) $z_1=1+ie^{i\theta}=1+i\cos\theta-\sin\theta$;

$\begin{cases}x=1-\sin\theta\\y=\cos\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=-\sin\theta\\y=\cos\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-1)^{2}=\sin^{2}\theta\\y^{2}=\cos^{2}\theta\end{cases}\Leftrightarrow(x-1)^{2}+y^{2}=1\Leftrightarrow(x-1)^{2}+y^{2}-1=0$ c'est

l'équation d'un cercle $\xi_{(L(1;0),1)}$ On a $-1<\sin\theta<1\Leftrightarrow0<1-\sin\theta<2\Leftrightarrow0<x<2$ et

$0\le\cos\theta<1\Leftrightarrow0\le y<1\Leftrightarrow M(x;y)\in\begin{cases}(x-1)^{2}+y^{2}=1\\0<x<2\\0\le y<1\end{cases}$

M_1 décrit le demi cercle de diamètre $[OA]$ situé dans le plan d'équation $y\ge0$ privé des points O , A et B avec $A(2)$ et $B(1+i)$

b) $z_1=1+ie^{i\theta}$; $z_2=ie^{i\theta}-1$. On a $ie^{i\theta}=z_1-1\Leftrightarrow z_2=-1+z_1-1\Leftrightarrow z_2=z_1-2$ Donc

$M_2=t_{(\vec{W})}(M_1)$ avec $\vec{W}=-2\vec{u}$; $M_2=t_{(\vec{W})}(M_1)$

c) M_2 décrit le demi cercle de centre $I(-1;0)$ et de rayon 1 privé des points O , A' et B' situés dans le demi plan d'équation $y\ge0$

Exercice N° 16 : 1) $M_1M_2M_3$ est équilatéral si $R\left(M_1,\frac{\pi}{3}\right)(M_2)=M_3\Leftrightarrow M_1M_2=M_1M_3$ et

$\left(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$,$R\left(M_1,\frac{\pi}{3}\right)(M_2)=M_3\Leftrightarrow\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=e^{i\frac{\pi}{3}}$, or

$e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\bar{j}=-j^{2}$ d'où

$(z_3-z_1)=-j^{2}(z_2-z_1)\Leftrightarrow z_3-z_1+j^{2}z_2-j^{2}z_1=0\Leftrightarrow-(1+j^{2})z_1+j^{2}z_2+z_3=0$ or

$1+j+j^{2}=0\Leftrightarrow-(1+j^{2})=j$ d'où $jz_1+j^{2}z_2+z_3=0\Leftrightarrow j(z_1+jz_2+j^{2}z_3)=0$ car $j^{3}=1$

d'où $z_1+jz_2+j^{2}z_3=0$

$R\left(M_1,\frac{\pi}{3}\right)(M_3)=M_2\Leftrightarrow z_2-z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_3-z_1)\Leftrightarrow z_2-z_1=-j^{2}(z_3-z_1)\Leftrightarrow j^{2}z_1+z_1-z_2-j^{2}z_3=0$

$\Leftrightarrow-jz_1-z_2-j^{2}z_3=0\Leftrightarrow j(z_1+j^{2}z_2+jz_3)=0\Leftrightarrow z_1+j^{2}z_2+jz_3=0$

2) a) Soit $P(z)=z^{3}-(1+\alpha+i\alpha)z^{2}+\alpha(1+i+i\alpha)z-i\alpha^{2}$; $P(1)=1-(1+\alpha+i\alpha)+\alpha(1+i+i\alpha)-i\alpha^{2}$

$=1-1-\alpha-i\alpha+\alpha+i\alpha^{2}-i\alpha^{2}=0$

b) $P(z)=(z-1)(z^{2}+bz+i\alpha^{2})=z^{3}+(b-1)z^{2}+z(i\alpha^{2}-b)-i\alpha^{2}$ d'où

$b-1=-1-\alpha-i\alpha\Leftrightarrow b=-\alpha-i\alpha$; $P(z)=0\Leftrightarrow z=1$ ou $z^{2}-\alpha(1+i)z+i\alpha^{2}=0$

$z^{2}-\alpha(1+i)z+i\alpha^{2}=0$;$\Delta=\alpha^{2}(1+i)^{2}-4i\alpha^{2}=\alpha^{2}(-2i)=\alpha^{2}(1-i)^{2}$;

$z'=\frac{\alpha(1+i)-\alpha(1-i)}{2}=\alpha i$ et $z''=\frac{\alpha(1+i)+\alpha(1-i)}{2}=\alpha\Rightarrow S_C=\{1;\alpha i;\alpha\}$

c) ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $z_A+jz_B+j^{2}z_C=0$ ou $z_A+j^{2}z_B+jz_C=0$

$z_A+jz_B+j^{2}z_C=0\Leftrightarrow1+i\alpha j+\alpha j^{2}=0\Leftrightarrow\alpha(j^{2}+ij)=-1\Leftrightarrow\alpha=\frac{-1}{j(i+j)}$

$z_A+j^{2}z_B+jz_C=0\Leftrightarrow1+j^{2}\alpha i+\alpha j=0\Leftrightarrow\alpha(j+ij^{2})=-1\Leftrightarrow\alpha=\frac{-1}{j(1+ij)}$. Les différentes valeurs possibles de α répondant à la question posée sont : $\frac{-1}{j(i+j)}$ et $\frac{-1}{j(1+ij)}$

Exercice N ° 17 : $(E):iz^{2}+2\sin\theta z-2i(1+\cos\theta)=0$

1) $\left[i(1+\cos\theta)\right]^{2}=(i+i\cos\theta)^{2}=-1+2(i^{2})\cos\theta-\cos^{2}\theta=-2\cos\theta-1-(1-\sin^{2}\theta)=-2\cos\theta-2+\sin^{2}\theta$

$\Delta'=(\sin\theta)^{2}-i(-2i(1+\cos\theta))=\sin^{2}\theta-2-2\cos\theta=\left[i(1+\cos\theta)\right]^{2}$

$z_1=i\sin\theta+1+\cos\theta=1+e^{i\theta}$, $z_2=-1-(\cos\theta-i\sin\theta)=-1-e^{-i\theta}=-(1+e^{-i\theta})$

2)a) $z'=(-1-e^{-i\theta})=\left(-e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}-e^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}\right)=-\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)\right)$

$=-e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}+\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right)=-e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)$; $z''=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)$;

$\frac{z'}{z''}=\frac{-(1+e^{-i\theta})}{1+e^{i\theta}}=\frac{-2\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}=\frac{-e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}=-e^{-i\theta}=e^{i(\pi-\theta)}$

b) $OM'M''$ est isocèle , il suffit de montrer que : $OM'=OM''$; $|z_{M'}-z_O|=|z_{M''}-z_O|$

$z'=z''e^{i(\pi-\theta)}\Rightarrow|z'|=|z''|\left|e^{i(\pi-\theta)}\right|=|z''|$ et par suite $OM'M''$ est isocèle.

c) $\arg\left(\frac{z'}{z''}\right) \equiv \arg\left(e^{i(\pi-\theta)}\right)[2\pi] \equiv \pi-\theta[2\pi]$; $-\pi<\theta<\pi \Leftrightarrow -\pi<-\theta<\pi \Leftrightarrow 0<\pi-\theta<2\pi$

Puisque OM'M" est isocèle en O donc il est équilatéral lorsque

$\pi-\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ ou $\pi-\theta=-\frac{\pi}{3}+2k'\pi$ avec $k'\in\mathbb{Z}$

$0<\frac{\pi}{3}+2k\pi<2\pi \Leftrightarrow \frac{-1}{6}<k<\frac{5}{6}$; $K=0$; $\pi-\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

$0<-\frac{\pi}{3}+2k'\pi<2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{6}<k'<\frac{7}{6}$; $K'=1$ $\pi-\theta=-\frac{\pi}{3}+2k'\pi=\frac{\pi}{3}+2\pi \Leftrightarrow \theta=\pi-\frac{5\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}$

OM'M" est équilatéral si et seulement si $\theta\in\left\{\frac{-2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$

Exercice N° 18 : $(E): z^2-(1-i)e^{i\alpha}z-ie^{i2\alpha}$; $\alpha\in[0;\pi]\oplus$

1) $\Delta=(1-i)^2e^{i2\alpha}+4ie^{i2\alpha}=-2ie^{i2\alpha}+4ie^{i2\alpha}=2ie^{i2\alpha}=\left((1+i)e^{i\alpha}\right)^2$

$z'=\frac{(1-i)e^{i\alpha}-(1+i)e^{i\alpha}}{2}=-ie^{i\alpha}=-i\cos\alpha+\sin\alpha$ $z''=\frac{(1-i)e^{i\alpha}+(1+i)e^{i\alpha}}{2}=e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$

2) A ; M' et M" sont alignés $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM'}:\overrightarrow{AM''}\right)=0$

$\overrightarrow{AM'}\begin{pmatrix}\sin\alpha-1\\-\cos\alpha+1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM''}\begin{pmatrix}\cos\alpha-1\\\sin\alpha+1\end{pmatrix}$; $\det\left(\overrightarrow{AM'}:\overrightarrow{AM''}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\sin\alpha-1 & \cos\alpha-1\\-\cos\alpha+1 & \sin\alpha+1\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha-1+\cos^2\alpha+1-2\cos\alpha=0 \Leftrightarrow 1-2\cos\alpha=0 \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{1}{2}$ et $\alpha\in[0;\pi]\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}$

Exercice N° 19 : $(E): z^2-2(1+i\cos\theta)z+2i\cos\theta=0$

1) $\Delta=4\sin^2\theta \Leftrightarrow z'=\frac{2(1+i\cos\theta)-2\sin\theta}{2}=1-\sin\theta+i\cos\theta$

$z''=\frac{2(1+i\cos\theta)+2\sin\theta}{2}=1+\sin\theta+i\cos\theta$

2) a) $z_1=1+ie^{i\theta}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$. Or $0<\theta<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$

$z_1=\left[2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right),\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right]$; $z_2=\left[2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right),\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right]$

b) $M_1(z_1)$; $z_1=1+ie^{i\theta}=1+i(\cos\theta+i\sin\theta)=1-\sin\theta+i\cos\theta$; $z_1=x+iy \Leftrightarrow \begin{cases}x=1-\sin\theta\\y=\cos\theta\\0<\theta<\frac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$;

$\xi:(x-1)^2+y^2=1$; $\xi_{(A;1)}$ avec $A(1;0)$

Or $0<\theta<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0<\cos\theta<1 \Leftrightarrow 0<y<1$; $0<\sin\theta<1 \Leftrightarrow 0<1-\sin\theta<1 \Leftrightarrow 0<x<1$ $M_1\in\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\0<y<1\\0<x<1\end{cases}$

L'ensemble des points M_1 est un quart du cercle $\left[\widehat{CO}\right]/\{C;O\}$ avec $C(1;1)$ situé dans le demi plan d'équation $y\geq 0$

c) $I=M_1*M_2$ $z_I=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{1+ie^{i\theta}+1+ie^{-i\theta}}{2}=1+i\cos\theta\otimes$; $z_I=x+iy \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=\cos\theta\end{cases} \Rightarrow I\in\Delta: x=1$

tel que $0<y<1$ car $0<\cos\theta<1$ $\forall\,\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. L'ensemble des points I est $[AC]/\{A;C\}$ avec $A(1;0)$ et $C(1;1)$

3) a) $\frac{z_2-1}{z_1-1}=\frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}}=e^{-i2\theta}$; $A(1)$; $\frac{|z_2-1|}{|z_1-1|}=1 \Leftrightarrow \frac{AM_2}{AM_1}=1$; $\arg\left(\frac{z_2-1}{z_1-1}\right)\equiv-2\theta[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM_1};\overrightarrow{AM_2}\right)\equiv-2\theta[2\pi]$

$\begin{cases}AM_2=AM_1\\\left(\overrightarrow{AM_1};\overrightarrow{AM_2}\right)\equiv-2\theta[2\pi]\end{cases} \Leftrightarrow R_{(A;-2\theta)}(M_1)=M_2$

b) AM_1M_2𝕊 est isocèle car $AM_2=AM_1$; AM_1M_2 est un triangle rectangle si et seulement si

$-2\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ Or $-\pi<-2\theta<0 \Leftrightarrow -2\theta=-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

2ième méthode : $\frac{z_2-1}{z_1-1}\in i\mathbb{R}$ si et seulement si $e^{-2i\theta}\in i\mathbb{R} \Rightarrow \cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)\in i\mathbb{R} \Rightarrow \cos(-2\theta)=0$ et

$-\pi<-2\theta<0 \Leftrightarrow -2\theta=-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

4) a) $z_2-z_1=1+ie^{-i\theta}-(1+ie^{i\theta})=i(e^{-i\theta}-e^{i\theta})=i(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)-\cos\theta-i\sin\theta)=2\sin\theta$

$z_2-z_1=2\sin\theta \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2}=2\sin\theta\vec{u} \Rightarrow (M_1M_2)//(O;\vec{u})$

b) $M_2=S_\Delta(M_1)$; $M_1*M_2=I\in\Delta$ car : $z_I=1+i\cos\theta$

$\begin{cases}(M_1M_2)//(O;\vec{u})\\\Delta\perp(O;\vec{u})\end{cases} \Rightarrow \Delta\perp(M_1M_2)$ On a : $\begin{cases}\Delta\perp(M_1M_2)\\M_1*M_2\in\Delta\end{cases} \Rightarrow \Delta=\text{med}[M_1M_2] \Rightarrow S_\Delta(M_1)=M_2$

c) Pour que OAM_2M_1 soit un losange il faut que OAM_2M_1 soit un parallélogramme et $OM_1=OA$. On a :

$\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM_1} \Rightarrow z_2=z_A+z_1 \Leftrightarrow 2\sin\theta=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$ OAM_2M_1 est un parallélogramme si et seulement si

$\theta=\frac{\pi}{6}$. Pour $\theta=\frac{\pi}{6}$; $z_1=1+ie^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_2=1+ie^{-i\frac{\pi}{6}}$; $OM_1=|z_1|=1$ donc OAM_2M_1 est un losange.

Exercice N° 20 : 1) $iz^2+(1-d)(1+i)z+d^2+1=0$; $\Delta=(1-d)^2(1+i)^2-4(d^2+1)i=-2i(d+1)^2$

$=(1-i)^2(d+1)^2=\left[(1-i)(d+1)\right]^2$; $z_1=i+d$; $z_2=-1-id$

2) $\Delta=\{M\in P$ tel que $: OM_1=OM_2\}$; $M\in\Delta \Leftrightarrow OM_1=OM_2 \Leftrightarrow |i+d|=|-1-id|$

$\Leftrightarrow |i+d|=\left|i\left(-\frac{1}{i}-d\right)\right|=|i||i-d| \Leftrightarrow |i+d|=|i-d| \Leftrightarrow AM=BM \Leftrightarrow M\in\text{med}[AB]$ avec $A(i)$ et $B(-i)$

et par suite $\Delta=\text{med}[AB]$

3) $|d|=3$; $M_1(i+d)$; $z_1-i=d \Leftrightarrow |z_1-i|=|d|=3 \Rightarrow M_1\in\xi_{(A;3)}$

4) $\arg(d)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$; $M_2(z_2)$ avec $z_2=-1-id$; $z_2+1=-id \Leftrightarrow \arg(z_2+1)\equiv\arg(-i)+\arg(d)[2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(z_2+1)\equiv-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}[2\pi] \Rightarrow \arg(z_2+1)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi] \Rightarrow \left(\vec{u};\overrightarrow{CM_2}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ avec $C(-1)$

$\Rightarrow M_2\in[Ct)/\{C\}$ tel que $\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{Ct}}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

5) a) $d\neq i$ et $d\neq -i$; $|d|=1 \Leftrightarrow OM=1 \Rightarrow M\in\zeta_{(O;1)}=\zeta_{[AB]}$; $M\in\zeta_{[AB]}$ donc AMB est rectangle en M

b) AMB est rectangle en M et $M\neq A$ et $M\neq B$; $\frac{z_A-z_M}{z_B-z_M}\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{i-d}{-i-d}\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (-i)\left(\frac{i-d}{-i-d}\right)\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{1+id}{-i-d}\in\mathbb{R} \Rightarrow \frac{-1-id}{i+d}\in\mathbb{R}$

6) $f_d: M(z)\to M'(z')$ tel que : $z'=\left(d-i\sqrt{3}\right)z+1$

a) f_d est une translation si et seulement si $d-i\sqrt{3}=1 \Rightarrow d=1+i\sqrt{3}$

b) $h(M)=M' \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'} \Rightarrow \frac{1}{2}z=z'$

c) $\varphi=f_1\circ h$; $M(z)\ \underline{\ h\ }\ M'(z')\ \underline{\ f_1\ }\ M''(z'')$;

$z'=\frac{1}{2}z$ et $z''=\left(1-i\sqrt{3}\right)z'+1=\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)z+1=\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z+1$ donc $z''=e^{-i\frac{\pi}{3}}z+1$ et par suite

$\varphi=R\left(w;-\frac{\pi}{3}\right)$ avec $w\left(\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}\right)$, $\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{2\left(1-i\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ Donc $w\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$

Exercice N° 21 : I)2) $\Delta=\left[i\left(b-\bar{b}\right)\right]^2$, $z'=1+ib$; $z''=1+i\bar{b}$

II) 1) a) M appartient au cercle trigonométrique ; $OM=1$;

$|b|=1$; $z_1=1+ib \Leftrightarrow z_1-1=ib \Rightarrow |z_1-1|=|i||b|=1$; $AM_1=1 \Leftrightarrow M_1\in\xi_{(A;1)}$;

$z_2=1+i\bar{b} \Leftrightarrow z_2-1=i\bar{b} \Rightarrow |z_2-1|=|i||\bar{b}|=1$; $AM_2=1 \Leftrightarrow M_2\in\xi_{(A;1)}$

b) $OM_1=OM_2 \Leftrightarrow |1+ib|=|1+i\bar{b}|=\left|\overline{1+i\bar{b}}\right|=|1-ib| \Leftrightarrow \left|i\left(\frac{1}{i}+b\right)\right|=\left|i\left(\frac{1}{i}-b\right)\right|$

$|i||-i+b|=|i||-i-b| \Leftrightarrow |-i+b|=|-i-b| \Leftrightarrow |b-i|=|b+i|$ Soit $E(i)$ et $F(-i)$

$|b-i|=|b+i| \Leftrightarrow |z_M-z_E|=|z_M-z_F| \Leftrightarrow ME=MF \Leftrightarrow M\in\text{med}[EF] \Leftrightarrow M\in(O;\vec{u})$. Donc

$M\in\xi_{(O;1)}\cap(O;\vec{u})$ et par suite $M=L(1)$ ou $M=L'(-1)$ alors $b=1$ ou $b=-1$

- Si $b=1$; $z_1^{2006}=(1+i)^{2006}=\left((1+i)^2\right)^{1003}=(2i)^{1003}=2^{1003}i^{1003}=2^{1003}\left(i^{(4\times250)+3}\right)=2^{1003}\left(i^4\right)^{250}i^3=-i2^{1003}$
- Si $b=-1$; $z_1=-2^{1003}.i$; $z_2=-i.2^{1003}$ $z_1^{2006}=(1-i)^{2006}=\left((1-i)^2\right)^{1003}=(-2i)^{1003}=-2^{1003}i$

2) a)

$b'-1=\frac{\bar{b}-1}{b}-1=\frac{\bar{b}-1-b}{b}=-\frac{1}{b}$; aff $\overrightarrow{AM'}=b'-1=-\frac{1}{b}=-\frac{b}{bb}=-\frac{1}{|b|^2}b=-\frac{1}{|b|^2}$ aff $\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'}=-\frac{1}{|b|^2}\overrightarrow{OM}$

et comme $-\frac{1}{|b|^2}<0$; $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires de sens contraire.

b) $M\in\xi_{(O;1)}/\{A\} \Leftrightarrow OM=1 \Leftrightarrow |b|=1 \Rightarrow AM'=1 \Leftrightarrow M'\in\xi_{(A;1)}$ et comme $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires de sens contraire, $M'\in\xi_{(A;1)}\cap[At)$ avec $\left(\overrightarrow{At}:\overrightarrow{OM}\right)\equiv\pi[2\pi]$. Faire une figure.

Exercice N° 22 : I) $z^2-i\left(2-e^{i\alpha}\right)z+e^{i\alpha}-1=0$

1) $\Delta=\left[i\left(2-e^{i\alpha}\right)\right]^2-4\left(e^{i\alpha}-1\right)=-\left(2-e^{i\alpha}\right)^2-4e^{i\alpha}+4\pm=-4+4e^{i\alpha}-e^{i2\alpha}-4e^{i\alpha}+4=-e^{i2\alpha}=\left(ie^{i\alpha}\right)^2$

$z_1=\frac{2i-ie^{i\alpha}-ie^{i\alpha}}{2}=i-ie^{i\alpha}$; $z_2=\frac{2i-ie^{i\alpha}+ie^{i\alpha}}{2}=i$

2) $z_1=i-ie^{i\alpha}=i\left(1-e^{i\alpha}\right)=i\left(e^{i0}-e^{i\alpha}\right)=i\left[e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}-e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}\right]=i\left[e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}-e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)\right]=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

Or $0<\alpha<2\pi \Leftrightarrow 0<\frac{\alpha}{2}<\pi \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}>0 \Rightarrow z_1=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$; $z_2=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

II) $z'=\frac{\bar{z}-i}{z+i}$ 1) a) Soit M un point invariant ; $f(M)=M \Leftrightarrow z=\frac{\bar{z}-i}{z+i} \Leftrightarrow z\bar{z}+iz=\bar{z}-i \Leftrightarrow x^2+y^2-x-y+i(x+y+1)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+ix-y=x-iy-i \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-y-x=0\\x+y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=y+x\\x+y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=-1\\x+y=-1\end{cases}$. Impossible ;

donc il n'existe aucun point invariant.

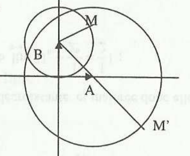
b) $z'-1=\frac{\bar{z}-i-\bar{z}-i}{\bar{z}+i}=\frac{-2i}{\bar{z}+i} \Leftrightarrow |z'-1|=\frac{2}{|\bar{z}+i|} \Leftrightarrow |z'-1||\bar{z}+i|=2 \Rightarrow AM'BM=2$

$\arg(z'-1)\equiv\arg\left(\frac{-2i}{\bar{z}+i}\right)[2\pi]\equiv\arg(-2i)-\arg\left(\bar{z}+i\right)[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{2}+\arg\left(\overline{\bar{z}+i}\right)[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{2}+\arg(z-i)[2\pi]$

$\Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AM'}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}+\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{BM}}\right) \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AM'}}\right)-\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{BM}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AM'}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{BM};\vec{u}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

c) $M \in \xi_{(B;1)} \Leftrightarrow BM = 1 \Leftrightarrow AM'BM = 2 \Leftrightarrow AM' = 2$; $M' \in \zeta'_{(A;2)}$. Or $\left(\widehat{\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc M' est le point d'intersection de $\zeta'_{(A;2)}$ et la droite qui passe par A et $\perp(BM)$.



Etape de construction :

- On marque un point M sur $\xi_{(B;1)}$.
- On trace le cercle $\zeta'_{(A;2)}$.
- On trace la droite $\Delta \perp (BM)$ en A Δ coupe $\xi'_{(A;2)}$ en deux points et on prend le point tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2) a) $\left(\overline{z}-i\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\left(\overline{z}+i\right)^3$; $\left|\overline{z}-i\right|^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|-1+i\right|\left|\overline{z}+i\right|^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\left|\overline{z}+i\right|^3 \Leftrightarrow \left|\overline{z}-i\right|^3 = \left|\overline{z}+i\right|^3$

$\Leftrightarrow \left|\overline{z}-i\right| = \left|\overline{z}+i\right| \Leftrightarrow |z-i| = |z+i| \Rightarrow CM = CB$ avec $C(-i) \Leftrightarrow M \in med[CB] \Leftrightarrow M \in \left(O;\overrightarrow{OA}\right)$ z est réel.

b) $z' = e^{i\alpha} \Leftrightarrow \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i} = e^{i\alpha} \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = e^{-i\alpha} \Leftrightarrow z+i = (z-i)e^{-i\alpha} \Leftrightarrow z+i = ze^{-i\alpha} - ie^{-i\alpha}$

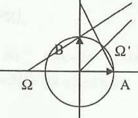
$\Leftrightarrow z\left(1-e^{-i\alpha}\right) = -i\left(1+e^{-i\alpha}\right)$ Or $\alpha \in]0;2\pi[\Rightarrow \alpha \neq 2k\pi$ et par suite $e^{-i\alpha} \neq 1$.

$$z = \frac{-i\left(1+e^{-i\alpha}\right)}{\left(1-e^{-i\alpha}\right)} = -i\left(\frac{e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}\right) = -i\left(\frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)}{e^{-i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)}\right)$$

$$= -i\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)-i\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = -i\left(\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{2i\sin\frac{\alpha}{2}}\right) = -\cot g\frac{\alpha}{2}.$$

c) $(E) : \left(\overline{z}-i\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\left(\overline{z}+i\right)^3$. i n'est pas une solution de l'équation car :

$\left(\overline{i}-i\right)^3 = (-2i)^3$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\left(\overline{i}+i\right)^3 = 0$. Donc $z \neq i \Leftrightarrow \overline{z} \neq -i \Rightarrow \left(\overline{z}+i\right) \neq 0$. Donc l'équation (E) est équivalent à : $\left(\frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow (z')^3 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$.



Rappel : $z^n = a$ avec $a \in [|a|, \theta]$: $z = \sqrt[n]{|a|}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$; $k \in \{0,1,\ldots\ldots,n-1\}$

$z' = e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)}$ avec $k \in \{0;1;2\}$; $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $z' = e^{i\frac{11\pi}{12}}$ ou $z' = e^{i\frac{19\pi}{12}}$

D'après 2) b) ; $z = -\cot g\frac{\pi}{8}$ ou $z = -\cot g\frac{11\pi}{24}$ ou $z = -\cot g\frac{19\pi}{24}$

d) $w' = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$; $f(\Omega) = \Omega'$, d'après 1) ; $\left(\widehat{\overrightarrow{B\Omega};\overrightarrow{A\Omega'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow (B\Omega) \perp (A\Omega')$ ❶

et d'après 2) a) ; $w' = e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow w = -\cot g\frac{\pi}{8} \Rightarrow \Omega \in \left(O;\overrightarrow{OA}\right)$ ❷

d'après ❶ et ❷ Ω est l'intersection de $\left(O;\overrightarrow{OA}\right)$ et la perpendiculaire à $(A\Omega')$ passant par B.

Exercice N° 23 :

1) a) $|z| = |z-2i| \Leftrightarrow |z|^2 = |z-2i|^2 \Leftrightarrow z\overline{z} = (z-2i)\overline{(z-2i)} \Leftrightarrow z\overline{z} = z\overline{z} + 2iz - 2i\overline{z} + 4 \Leftrightarrow 2i\left(z-\overline{z}\right) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2i(2i\,Im(z)) + 4 = 0 \Leftrightarrow -4Im(z) + 4 = 0 \Leftrightarrow Im(z) = 1 \Leftrightarrow M(z) \in \Delta : y = 1$

b) $\begin{cases}\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}}\right) \equiv \theta[2\pi] ; 0 < \theta < \pi \\ M(z) \in \Delta : y = 1\end{cases}$ Donc $Im(z) = |z|\sin\theta = 1 \Rightarrow |z| = \frac{1}{\sin\theta}$;

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{1}{\sin\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) = \cot g\theta + i$

2) $n \in IN^*$; $n \geq 2$; $E : z^n = (z-2i)^n$.

a) z est une solution de $(E) \Leftrightarrow z^n = (z-2i)^n \Rightarrow |z^n| = |(z-2i)^n| \Leftrightarrow |z|^n = |z-2i|^n$ donc $M(z) \in \Delta$

b) $\frac{z}{z-2i} = e^{i\alpha}$; $\alpha \neq 2k\pi \Leftrightarrow (z-2i)e^{i\alpha} = z \Leftrightarrow z\left(e^{i\alpha}-1\right) = 2ie^{i\alpha}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2ie^{i\alpha}}{e^{i\alpha}-1} = \frac{2ie^{i\alpha}}{e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)} = \frac{2ie^{i\frac{\alpha}{2}}}{2i\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \cot g\frac{\alpha}{2} + i$$

On peut retrouver 2) b) sur les images des solutions d'ordonnés 1 donc ils sont situés sur $\Delta : y = 1$.

c) $z^n = (z-2i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z-2i}\right)^n = 1$; $z \neq 2i$ Donc $\frac{z}{z-2i}$ est une racine $n^{ième}$

$\Leftrightarrow \frac{z}{z-2i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$; $k \in \{1;2;\ldots.;n-1\}$ pour k=0 On a $\frac{z}{z-2i} = e^{i0} = 1$ impossible

$\Leftrightarrow z = z_k = \cot g\left(\frac{\frac{2k\pi}{n}}{2}\right) + i$ $k \in \{1;2;\ldots;n-1\} \Leftrightarrow z = z_k = \cot g\left(\frac{k\pi}{n}\right) + i$ $k \in \{1;2;\ldots.;n-1\}$

3) **Rappel** : $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b^1 + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^p a^{n-p}b^p + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k$

a) $z^n = (z-2i)^n \Leftrightarrow z^n = (z+(-2i))^n \Leftrightarrow z^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k}(-2i)^k \Leftrightarrow z^n = C_n^0 z^n(-2i)^0 + \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k}(-2i)^k$

$\Leftrightarrow z_n = 1 \times z^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k z^{n-k}(-2i)^k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} C_n^k z^{n-k}(-2i)^k = 0 \neq$

b) L'équation (E) est équivalent à : $\sum_{k=1}^{n} C_n^k z^{n-k}(-2i)^k = 0\infty$. On pose

$P_{(n-1)}(z) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k z^{n-k}(-2i)^k \Rightarrow P_{(n-1)}(z) = C_n^1(-2i)z^{n-1} + C_n^2(-2i)^2 z^{n-2} + \ldots + C_n^n(-2i)^n$

D'autre part les nombres $z_k = \cot g\left(\frac{k\pi}{n}\right) + i$ sont des solutions de (E) et par suite

$\forall z \in \mathbb{C}$; $P_{n-1}(z) = C_n^1(-2i)\prod_{k=1}^{n-1}(z-z_k) = C_n^1(-2i)(z-z_1)(z-z_2)\ldots.(z-z_{n-1})$

Pour z = 0 ; $P_{(n-1)}(0) = C_n^n(-2i)^n$ et $P_{n-1}(0) = C_n^1(-2i)(-z_1)(-z_2)\ldots..(-z_{n-1})$ d'où

$(-2i)C_n^1(-z_1)(-z_2)\ldots..(-z_{n-1}) = C_n^1(-2i)^n \Leftrightarrow (-2i)n(-1)^{n-1}(z_1)(z_2)\ldots..(z_{n-1}) = (-2i)^n$

$\Leftrightarrow (-1)(-1)^{n-1}(2in)z_1z_2\ldots..z_{n-1} = (-2i)^n \Leftrightarrow (-1)^n(2in)z_1z_2\ldots.z_{n-1} = (-1)^n(2i)^n \Leftrightarrow z_1z_2\ldots\ldots..z_{n-1} = \frac{(2i)^{n-1}}{n}$

c) $z_1z_2\ldots\ldots.z_{n-1} = \frac{(2i)^{n-1}}{n} \Rightarrow |z_1z_2\ldots\ldots.z_{n-1}| = \left|\frac{(2i)^{n-1}}{n}\right| \Rightarrow |z_1||z_2|\ldots\ldots|z_{n-1}| = \frac{|2i|^{n-1}}{n}$

$\Leftrightarrow \left|\cot g\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\right|\left|\cot g\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\right|\ldots.\left|\cot g\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)+i\right| = \frac{2^{n-1}}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\ldots.\frac{1}{\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)} = \frac{2^{n-1}}{n}$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\ldots.\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$

4) a) $U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{2^n} - \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{n+1-2n}{2^n} = \frac{1-n}{2^n} \leq 0$. Donc $U_{n+1} \leq U_n$ et la suite (U_n) est décroissante

$\forall n \in IN^* / \{1\}$; $U_n > 0 \Rightarrow (U_n)$ est majorée par 0.

b) $U_{n+1} = \frac{n+1}{2^n} = \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2}$ Comme (U_n) est décroissante et majorée donc elle est convergente. Soit $l = \lim_{n\to+\infty} U_n$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = l$; comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}l$;

$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2}$ alors $l = \frac{1}{2}l \Rightarrow l = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

Exercice N° 24 : 1) $z_1z_2 = \frac{c}{a} = 2\sin^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta = -2i\sin\theta(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\sin\theta e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta} = 2\sin\theta e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$

$0 < \theta < \pi \Rightarrow \sin\theta > 0 \Rightarrow |z_1z_2| = 2\sin\theta$ et $\arg(z_1z_2) \equiv \theta - \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \theta - \frac{\pi}{2}[2\pi]$

2) $\Delta' = 1 - 2\sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$

$z_1 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$; $z_2 = 1 - \cos\theta - i\sin\theta$

3) $z_1 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$0 < \theta < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{\theta}{2} > 0 \Rightarrow |z_1| = 2\cos\theta$ et $\arg z_1 \equiv \frac{\theta}{2}[2\pi]$

$\arg(z_2) \equiv \theta - \frac{\pi}{2} - \arg(z_1)[2\pi] \equiv \theta - \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}[2\pi] \equiv \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$|z_1z_2| = 2\sin\theta$ et $|z_1| = 2\cos\frac{\theta}{2} \Rightarrow |z_2| = \frac{2\sin\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\times2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} = 2\sin\frac{\theta}{2}$

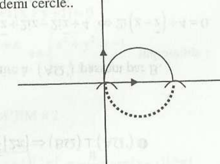
D'où $z_2 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

4) $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$. $z_I = \frac{z_1+z_2}{2} = 1$ Pour $z_1 = x + iy$ $x \in IR$ et $y \in IR$;

$E_1 = \{M_1(z) ; z = z_1$ et $\theta \in]0;\pi[\}$ $M(x;y) \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1 - \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ 0 < \theta < \pi\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x - 1 = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ 0 < \theta < \pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2 + y^2 = 1 \\ 0 < x < 2 \\ 0 < y \leq 1\end{cases}$ Donc E_1 est un demi cercle de centre $I(1;0)$ et de rayon 1.

$E_2 = \{M_2(z_2) ; z_2 = 1 + \cos\theta - i\sin\theta ; \theta \in]0;\pi[\}$; $I = M_1 * M_2 \Leftrightarrow M_2 = S_I(M_1)$. Lorsque M_1 décrit l'ensemble E_1 alors M_2 décrit l'image de E_1 par S_I qui aussi un demi cercle..



5) $z_1' = \frac{1}{z_1}$; $\left(\frac{z_1+z_1'}{2}-1\right)\left(\frac{z_1+z_1'}{2}+1\right)=\left(\frac{z_1+z_1'}{2}\right)^2-1=\frac{z_1^2+z_1'^2+2z_1z_1'}{4}-1$

$=\frac{z_1^2+z_1'^2+2z_1z_1'-4}{4}=\frac{z_1^2+z_1'^2+2z_1z_1'-4z_1z_1'}{4}$ car $z_1z_1'=1$.

Donc $\left(\frac{z_1+z_1'}{2}-1\right)\left(\frac{z_1+z_1'}{2}+1\right)=\frac{z_1^2+z_1'^2-2z_1z_1'}{4}=\left(\frac{z_1-z_1'}{2}\right)^2$

b) $K=M_1*M'_1 \Rightarrow z_K=\frac{z_1+z'_1}{2}$; $\left(\frac{z_1+z_1'}{2}-1\right)\left(\frac{z_1+z_1'}{2}+1\right)=\left(\frac{z_1-z_1'}{2}\right)^2$ Donc

$\arg\left(\frac{z_1+z_1'}{2}-1\right)\left(\frac{z_1+z_1'}{2}+1\right)\equiv\arg\left(\frac{z_1-z_1'}{2}\right)^2[2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_1+z_1'}{2}-1\right)+\arg\left(\frac{z_1+z_1'}{2}+1\right)\equiv 2\arg\left(\frac{z_1-z_1'}{2}\right)[2\pi]$

$\Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{AK}}\right)+\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{BK}}\right)\equiv 2\arg(z_1+z'_1)-2\arg(2)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{AK}}\right)+\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{BK}}\right)\equiv 2\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{M'_1M_1}}\right)[2\pi]$

$\Leftrightarrow \left(\vec{i};\overrightarrow{AK}\right)-\left(\vec{i};\overrightarrow{M'_1M_1}\right)\equiv\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{M'_1M_1}}\right)-\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{BK}}\right)[2\pi]\Rightarrow\left(\overrightarrow{M'_1M_1};\overrightarrow{AK}\right)\equiv\left(\overrightarrow{BK};\overrightarrow{M'_1M_1}\right)[2\pi]$

Donc $\overrightarrow{M'_1M_1}$ est un vecteur directeur d'une bissectrice du secteur $[KA;KB]$.

Exercice N° 25 : I) $z^3=a=i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc les solutions sont les nombres complexes

$z_k=e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)}=e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$; avec $k\in\{0;1;2\}$ $z_0=e^{-i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt3}{2}-\frac{1}{2}i$; $z_1=i$; $z_2=-\frac{\sqrt3}{2}-\frac{i}{2}$

$z^3=-2+2i=2\sqrt2\left(-\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}i\right)=2\sqrt2e^{i\frac{3\pi}{4}}=\left(\sqrt2\right)^3e^{i\frac{3\pi}{4}}$ donc les solutions sont les nombres complexes

$z_k=\sqrt2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ $k\in\{0;1;2\}$; $z_0=\sqrt2e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$; $z_1=\sqrt2e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}$; $z_3=\sqrt2e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)}$ $z_0=1+i$ $z_1=\sqrt2e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}$

$=\sqrt2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\sqrt2e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}=\sqrt2\left(\frac{1+i}{\sqrt2}\right)\left(\frac{-1+i\sqrt3}{2}\right)=\frac{-1-\sqrt3}{2}+i\left(\frac{\sqrt3-1}{2}\right)$

$z_3=\sqrt2e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)}=\sqrt2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)}=\sqrt2e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{4\pi}{3}}=\sqrt2\left(\frac{1+i}{\sqrt2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt3i}{2}\right)=\frac{-1+\sqrt3+i\left(-\sqrt3-1\right)}{2}$

II) 1) z est solution de $E \Leftrightarrow z^3-6iz^2-3(3+i)z-4+i=0$

$\Leftrightarrow (z'+2i)^3-6i(z'+2i)^2-3(3+i)(z'+2i)-4+i=0 \Leftrightarrow z'^3+6iz'^2-12z'-8i-6iz'^2+24z'+24i-9z'-18i-3iz'$

$+6-4+i=0 \Leftrightarrow z'^3+3(1-i)z'+2-i=0$. Donc z' est une solution de $E':z^3+3(1-i)z+2-i=0$

2) a) z' est une solution de $E \Leftrightarrow (u+v)^3+3(1-i)(u+v)+2-i=0$ et $uv=-1+i$

$\Leftrightarrow u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+3(1-i)(u+v)+2-i=0$ et $uv=-1+i$

$\Leftrightarrow u^3+v^3+3(u+v)uv+3(1-i)(u+v)+2-i=0$ et $uv=-1+i$

$\Leftrightarrow u^3+v^3+3(u+v)uv(1-i)+2-i=0$ et $uv=-1+i$ $\Leftrightarrow \begin{cases}u^3+v^3=-2+i\\ uv=-1+i\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u^3+v^3=-2+i\\ u^3v^3=(-1+i)^3=2(1+i)\end{cases}$ Donc u^3 et v^3 sont des solutions de l'équation $(E''):X^2+(2-i)X+2(1+i)=0$

3) a) $\Delta=(2-i)^2-4(2+2i)=-5-12i=(2-3i)^2$ donc $X_1=-i$ et $X_2=-2+2i$

b) u^3 et v^3 sont des solutions de l'équation

$(E'')\Leftrightarrow(u^3;v^3)=(-i\ ;\ -2+2i)$ ou $(u^3;v^3)=(-2+2i\ ;-i)$ alors u^3 et v^3 sont les racines cubiques de a et b et z' est solution de E'

Or d'après 2), On a : $\begin{cases}u+v=z'\\ uv=\sqrt2e^{i\frac{3\pi}{4}}\end{cases}$

x	$e^{-i\frac{\pi}{6}}$	$e^{i\frac{\pi}{2}}$	$e^{i\frac{7\pi}{6}}$
$\sqrt2e^{i\frac{\pi}{4}}$	$\sqrt2e^{i\frac{\pi}{12}}$	$\sqrt2e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$\sqrt2e^{-i\frac{7\pi}{12}}$
$\sqrt2e^{i\frac{11\pi}{12}}$	$\sqrt2e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$\sqrt2e^{-i\frac{7\pi}{12}}$	$\sqrt2e^{i\frac{\pi}{12}}$
$\sqrt2e^{i\frac{19\pi}{12}}$	$\sqrt2e^{-i\frac{7\pi}{12}}$	$\sqrt2e^{i\frac{\pi}{12}}$	$\sqrt2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z'=e^{i\frac{\pi}{2}}+\sqrt2e^{i\frac{\pi}{4}}=i+1+i=1+2i$ ou $z'=e^{-i\frac{\pi}{6}}+\sqrt2e^{i\frac{11\pi}{12}}=-\frac{1}{2}+i\left(\frac{\sqrt3-2}{2}\right)$ ou

$z'=e^{i\frac{7\pi}{6}}+\sqrt2e^{i\frac{19\pi}{12}}=-\frac{1}{2}+i\left(\frac{-\sqrt3-2}{2}\right)$ donc les solutions de(E) sont : $1+2i+2i=1+4i, -\frac{1}{2}+i\left(\frac{\sqrt3-2}{2}\right)+2i$

et $\frac{-1}{2}+i\left(\frac{-\sqrt3-2}{2}\right)+2i$

Exercice N° 26 : Si $u=-1$ alors $A=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Supposons $u\neq1$ alors

$(1+u)A=1-2u+3u^2-4u^3+....+(-1)^{n-1}n.u^{n-1}+u-2u^2+3u^3+...+(-1)^{n-2}(n-1)u^{n-1}+(-1)^{n-1}nu^n$

Donc $(1+u)A=1-u+u^2-u^3+....+(-1)^{n-1}u^{n-1}+(-1)^{n-1}nu^n$. En outre

$1-u+u^2-u^3+....+(-1)^{n-1}u^{n-1}=1+(-u)+(-u)^2+(-u)^3+....+(-1)^{n-1}(-u)^{n-1}=\frac{1-(-u)^n}{1-(-u)}$.

D'où $(1+u)A=\frac{1-(-1)^nu^n}{(1+u)}+(-1)^{n-1}nU^n$. or $U^n=1$ car U est une racine $n^{ième}$ de l'unité Donc

$A=\frac{1-(-1)^n}{(1+u)^2}+\frac{n(-1)^{n-1}}{1+u}$ Et par suite $A=\frac{-n}{1+u}$ si n pair et $A=\frac{2}{(1+u)^2}+\frac{n}{1+u}$ si n impair.

Exercice N° 27 : On a : $p(1)\neq0$; $p(z)=0\Rightarrow z-1\neq0$ et $(z-1)(p(z))=0$ $\Leftrightarrow z-1\neq0$ et $z^5-1=0$ d'où les racines de p sont : $z_K=e^{i\frac{2k\pi}{5}}$; $k\in\{1\ ;2\ ;3\ ;4\}$

$z_1=e^{i\frac{2\pi}{5}}$; $z_2=e^{i\frac{4\pi}{5}}$; $z_3=e^{i\frac{6\pi}{5}}=e^{-i\frac{4\pi}{5}}$; $z_4=e^{i\frac{8\pi}{5}}=e^{-i\frac{2\pi}{5}}$ Donc $S_C=\left\{e^{i\frac{2\pi}{5}}\ ;\ e^{-i\frac{2\pi}{5}}\ ;\ e^{-i\frac{4\pi}{5}}\ ;\ e^{i\frac{4\pi}{5}}\right\}$

$P(z)=\left[\left(z-e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right)\left(z-e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)\left(z-e^{-i\frac{4\pi}{5}}\right)\left(z-e^{-i\frac{4\pi}{5}}\right)\right]=\left(z^2-2\cos\frac{2\pi}{5}z+1\right)\left(z^2-2\cos\frac{4\pi}{5}z+1\right)$

2) On pose $a=\cos\frac{2\pi}{5}$ et $b=\cos\frac{4\pi}{5}$; $P(z)=z^4-2(a+b)z^3+2(1+2ab)z^2-2(a+b)z+1$ Or

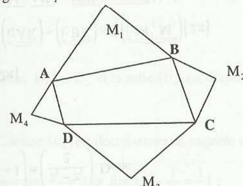
$P(z)=z^4+z^3+z^2+z+1$ d'où $-2(a+b)=1$; $2(1+2ab)=1$; $-2(a+b)=1 \Leftrightarrow a+b=-\frac{1}{2}$ et $ab=-\frac{1}{4}$

et par suite a et b sont les racines de l'équation $4z^2+2z-1=0$ $\Delta'=5$; $z'=\frac{-1+\sqrt5}{4}$; $z''=\frac{-1-\sqrt5}{4}$.

Or $a=\cos\frac{2\pi}{5}>0$ car $0<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$ et $b=\cos\frac{4\pi}{5}<0$ car $\frac{\pi}{2}<\frac{4\pi}{5}<\pi$ Donc $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt5}{4}$

et $\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt5}{4}$

Exercice N° 28 : 1) Le triangle M_1AB est isocèle rectangle en M_1 de sens direct



$\Leftrightarrow\begin{cases}M_1A=M_1B\\ \left(\overrightarrow{M_1A},\overrightarrow{M_1B}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{M_1A}{M_1B}=1\\ \left(\overrightarrow{M_1A},\overrightarrow{M_1B}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

$\begin{cases}\left|\frac{M_1A}{M_1B}\right|=1\\ \arg\left(\frac{z_1-b}{z_1-a}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

$\Leftrightarrow\frac{z_1-b}{z_1-a}=e^{i\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow\frac{z_1-b}{z_1-a}=i\rightarrow\ \Leftrightarrow z_1=\frac{b-ia}{1-i}$.

De même on montre que $z_2=\frac{c-ib}{1-i}$; $z_3=\frac{d-ic}{1-i}$ et $z_4=\frac{a-id}{1-i}$

2) a) $\left(\overrightarrow{M_2M_4},\overrightarrow{M_1M_3}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_4-z_2}\right)[2\pi]\equiv\arg\left(\frac{d-ic-b+ia}{a-id-c+ib}\right)[2\pi]\equiv\arg\left(\frac{d-b+i(a-c)}{a-c+i(b-d)}\right)[2\pi]$

$\equiv\arg\left(i\left(\frac{a-c+i(b-d)}{a-c+i(b-d)}\right)\right)[2\pi]\equiv\arg i[2\pi]=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) $\frac{M_1M_3}{M_2M_4}=\frac{|z_3-z_1|}{|z_4-z_2|}=\left|\frac{i(d-ic-b+ia)}{a-id-c+ib}\right|=|i|=1$. Donc $M_1M_3=M_2M_4$

Exercice N° 29 : 1) ABC est un triangle équilatéral de sens direct, si et seulement si,

$\begin{cases}AB=AC\\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{AB}{AC}=1\\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=1\\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$ $\frac{c-a}{b-a}=e^{i\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow c-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$.

Donc ABC est un triangle équilatéral de sens direct

2) ABC est un triangle équilatéral de sens indirect, si et seulement si,

$\begin{cases}AB=AC\\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{AB}{AC}=1\\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=1\\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$

$\frac{c-a}{b-a}=e^{-i\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow c-a=e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)$. Donc ABC est un triangle équilatéral de sens indirect

3) ABC est un triangle équilatéral, si et seulement si, $c-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$ ou $c-a=e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

$\left[(c-a)-e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)\right]\left[(c-a)-e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)\right]=0$

$\Leftrightarrow(c-a)^2-(c-a)(b-a)e^{-i\frac{\pi}{3}}-(b-a)(c-a)e^{i\frac{\pi}{3}}+(b-a)^2=0$

$\Leftrightarrow(c-a)^2-(c-a)(b-a)\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)+(b-a)^2=0\Leftrightarrow(c-a)^2-(c-a)(b-a)+(b-a)^2=0$

$\Leftrightarrow c^2-2ac+a^2-cb+ac+ab-a^2+b^2-2ab+a^2=0\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$

Exercice N° 30 : 1) $z^2-2ie^{i\theta}z-4(1-i)e^{2i\theta}=0$; $\Delta'=-e^{2i\theta}+4(1-i)e^{2i\theta}=e^{2i\theta}(3-4i)=\left[(2-i)e^{i\theta}\right]^2$

$z'=ie^{i\theta}+(2-i)e^{i\theta}=2e^{i\theta}$; $z''=ie^{i\theta}-(2-i)e^{i\theta}=-2(1-i)e^{i\theta}$

$S_C=\left\{2e^{i\theta},-2(1-i)e^{i\theta}\right\}$.

2) a) Soit $\Gamma=\left\{M'(z')\ ;\ z'=2e^{i\theta}\ ;\ \theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right\}$

$M'\in\Gamma\Leftrightarrow\begin{cases}|z_{M'}|=2\\ \arg(z_{M'})\equiv\theta[2\pi]\end{cases}$; $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ $\Leftrightarrow OM'=:2$ et $\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv\theta[2\pi]$; $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Donc Γ est l'arc $\left[\widehat{AB}\right]/\{A;B\}$ du cercle $\xi_{(O;2)}$ avec $A(1)$ et $B(i)$

b) $R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}(N') = N \Rightarrow z_N = 2ie^{i\theta}$.

c) $z_{\overrightarrow{OM'}} = 2e^{i\theta}$ et $z_{\overrightarrow{M''N}} = 2ie^{i\theta} - 2ie^{i\theta} + 2e^{i\theta} = 2e^{i\theta} \Rightarrow \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{M''N}$

$\Rightarrow$ OM'NM" est un parallélogramme

d) On a $M' \in \Gamma \Leftrightarrow N = r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}(M')$ et $M'' = t_{\overrightarrow{M'O}}(N)$ car

OM'NM" est un parallélogramme $\Rightarrow M'' = t_{\overrightarrow{M'O}} \circ r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}(M')$

3) a) On a $(-2+2i)e^{i\theta} = \left[2\sqrt{2};\theta+\frac{3\pi}{4}\right] = z_{M''}$. Les racines

cubiques de $z_{M''}$ sont les $z_k = \left[\sqrt{2};\frac{\theta}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right]$; $k \in \{0;1;2\}$.

b) Soit $\alpha \in \,]0;2\pi[$; $\frac{\sqrt{2}z-1}{z} = \sqrt{2}e^{i\alpha} \Leftrightarrow \sqrt{2}z-1 = \sqrt{2}e^{i\alpha}.z \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}-\sqrt{2}e^{i\alpha}\right)z = 1$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{2}\left(1-e^{i\alpha}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}-e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)} \Leftrightarrow z = \frac{1}{-2\sqrt{2}i\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}} \Leftrightarrow z = \frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{-\sqrt{2}2i\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2}-i\sin\frac{\alpha}{2}}{-2\sqrt{2}i\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{-i}{-2\sqrt{2}i}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1+i\cot g\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+i\cot g\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

c) On remarque que $z = 0$ n'est pas une solution de l'équation (E_θ)

$$(E'_\theta) \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}z-1}{z}\right)^3 = (-2+2i)e^{i\theta} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}z-1}{z} = \left[\sqrt{2};\frac{\theta}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right] ; k \in \{0;1;2\}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+i\cot g\left(\frac{\theta}{6}+\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{3}\right)\right) ; k \in \{0;1;2\} \Rightarrow z_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+i\cot g\left(\frac{\theta}{6}+\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+i\cot g\left(\frac{\theta}{6}+\frac{11\pi}{24}\right)\right) \text{ et } z_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+i\cot g\left(\frac{\theta}{6}+\frac{19\pi}{24}\right)\right) \text{Donc } S_{\mathbb{C}} = \{z_0;z_1;z_2\}.$$

****

SOLUTION DES EXERCICES RELATIFS AU CHAPITRE 1

****

Exercice 1: 1)Faux : car $S_\Delta \circ S_\Delta = idP$

2)Faux : car l'identité fixe deux points distincts; donc une isométrie qui fixe deux points distincts alors f soit une symétrie orthogonal soit l'identité.

3)Vrai : $O \in \Delta_1 \cap \Delta_2$ alors $f(O) \in f(\Delta_1) \cap f(\Delta_2)$, comme $f(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \Delta_1 \cup \Delta_2$ alors $f(O) \in \Delta_1 \cap \Delta_2 = \{O\}, f(O) = O$

4)Faux : une isométrie qui fixe un point A alors soit l'identité soit une symétrie orthogonal d'axe passant par A, soit une rotation de centre A

5)Vrai : : M_1 et M_2 deux points du plan tel que $f(M_1) = M'_1$ et $f(M_2) = M'_2$

$M'_1M'_2 = \left|\left(i\overline{z_2}+2\right)-\left(i\overline{z_1}+2\right)\right| = \left|i\left(\overline{z_2-z_1}\right)\right| = |i||z_2-z_1| = M_1M_2$

conserve les distances donc f est une isométrie

6)Vrai (théorème du cour).

7)Vrai $t_{\overrightarrow{AC}} \circ f = S_{(IJ)}$ alors $t_{\overrightarrow{CA}} \circ t_{\overrightarrow{AC}} \circ f = t_{\overrightarrow{CA}} \circ S_{(IJ)}$, $id_p \circ f = t_{\overrightarrow{CA}} \circ S_{(IJ)}$; $f = t_{\overrightarrow{CA}} \circ S_{(IJ)}$, et $\overrightarrow{CA}$ Un vecteur directeur de (IJ) alors f est une symétrie glissante.

8)Faux, contre exemple : dans le triangle ABC de question 7)

On a $t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_{(BC)} = S_{(OI)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(BC)} = S_{(OI)}$ symétrie orthogonale.

Exercice 2: 1)a) et b) ; 2) c) et d) ; 3) a) et c) ; 4) a) ; 5)(i) : c) (ii) : a) ; 6) b) ; 7) b) ; 8)c)

Exercice 3: : 1)a) Soit G le centre de gravité du triangle ABC

alors $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$, comme l'isométrie conserve l'équipollence des bipoints alors

$\overrightarrow{f(G)f(A)}+\overrightarrow{f(G)f(B)}+\overrightarrow{f(G)f(C)} = \vec{0}$ or $\{f(A),f(B),f(C)\} = \{A,B,C\}$

donc $\overrightarrow{f(G)A}+\overrightarrow{f(G)B}+\overrightarrow{f(G)C} = \vec{0}$, donc f(G) le centre de gravité du triangle ABC d'où f(G) =G car G est unique.

b) Si f(A) =A et comme f(G) =G alors f =idP ou f =$S_{(AG)}$.Si f =idP alors f(B) =B et f(C) =C donc f(ABC) =ABC d'où f laisse invariant ABC.

Si f =$S_{(AG)}$ alors f(B) =C et f(C) =B donc f laisse ABC invariant.

c) Supposons que f(A) =B, on a f(G) =G donc f admet un point invariant G et $f \neq id_P$ d'où f soit une rotation de centre G et d'angle $\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)[2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou f =S_Δ avec Δ =méd[AB], Δ =(CG)

vérifier que $R_{\left(G,\frac{2\pi}{3}\right)}$ et $S_{(CG)}$ laissent invariant le triangle ABC. Supposons que f(A) =C même méthode que b)on démontre que $f = S_{(GB)}$ ou $f = R_{\left(G,\frac{-2\pi}{3}\right)}$

Conclusion: les isométries laissant invariant ABC sont:

id_P ; $R_{\left(G,\frac{2\pi}{3}\right)}$; $R_{\left(G,\frac{-2\pi}{3}\right)}$; $S_{(AG)}$; $S_{(GB)}$ et $S_{(GC)}$

2) a) $g = S_{(AC)} \circ h$, h transforme le triangle ABC en le triangle ACD donc $h(\{A,B,C\}) = \{A,C,D\}$ on a: $S_{(AC)}(\{A,C,D\}) = \{A,C,B\}$; $g(\{A,B,C\}) = S_{(AC)} \circ h(\{A,B,C\}) = \{A,C,B\}$ Donc g laisse invariant le triangle ABC. D'après 1) on a: $g \in \left\{idP; R_{\left(G,\frac{2\pi}{3}\right)}; R_{\left(G,\frac{-2\pi}{3}\right)}; S_{(AG)}; S_{(BG)}; S_{(CG)}\right\}$

b) $h \in \left\{S_{(AC)}; S_{(AC)} \circ R_{\left(G,\frac{2\pi}{3}\right)}; S_{(AC)} \circ R_{\left(G,\frac{-2\pi}{3}\right)}; S_{(AC)} \circ S_{(AG)}; S_{(AC)} \circ S_{(BG)}; S_{(AC)} \circ S_{(CG)}\right\}$

Exercice 4: O=A*C donc $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, O =B*D donc $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD} = \vec{0}$ comme l'isométrie conserve l'équipollence des bipoints alors: $\overrightarrow{f(O)f(A)}+\overrightarrow{f(O)f(B)}+\overrightarrow{f(O)f(C)}+\overrightarrow{f(O)f(D)} = \vec{0}$

Et comme $\{f(A),f(B),f(C),f(D)\} = \{A,B,C,D\}$ Donc $\overrightarrow{f(O)A}+\overrightarrow{f(O)B}+\overrightarrow{f(O)C}+\overrightarrow{f(O)D} = \vec{0}$

$\overrightarrow{f(O)A}+\overrightarrow{f(O)B}+\overrightarrow{f(O)C}+\overrightarrow{f(O)D} = 4\overrightarrow{f(O)O}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$ et comme

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD} = \vec{0}$ d'où $4\overrightarrow{f(O)O} = \vec{0}$ alors f(O) =O.

2)a) on pose f(A) =A' , on a f(O) =O donc OA' =OA. Comme $OA \neq OB$ car ABCD non réduit à un carré donc OA' ≠ OB $\Rightarrow A' \neq B$ d'où $f(A) \neq B$ De même on montre que $f(A) \neq D$.

Conclusion: $f(A) \notin \{B,D\}$.

3)a) f(A) =C ; $S_{(BD)} \circ f(A) = S_{(BD)} \circ f(A) = S_{(BD)}(C) = A$; $S_{(BD)} \circ f(O) = S_{(BD)}(O) = O$;

$S_{(BD)} \circ f$ est une isométrie qui fixe 2 points distincts A et O donc

$S_{(BD)} \circ f = idP$ ou $S_{(BD)} \circ f = S_{(AO)}$.

b) $S_{(BD)} \circ f$ =idP donc $f = S_{(BD)}$, $S_{(BD)} \circ f = S_{(AO)} \Rightarrow f = S_{(BD)} \circ S_{(AO)} = S_O$

car $(BD) \cap (AO) = \{O\}$ et $(AO) \perp (BD)$ enfin $f = S_{(BD)}$ où $f = S_O$

4)f(A) =A alors $S_{(AC)} \circ f(A) = S_{(AC)}(A) = A$ et on a

$S_{(AC)} \circ f(O) = S_{(AC)}(O) = O$ donc fixe deux points distincts O et A donc $S_{(AC)} \circ f = idP$ ou

$S_{(AC)} \circ f = S_{(AO)}$. ; $S_{(AC)} \circ f = idP$ donc $f = S_{(AC)}$; $S_{(AC)} \circ f = S_{(AO)}$ donc $f = S_{(AC)} \circ S_{(AO)} = id_P$

Conclusion: les isométries qui laissent globalement invariant le losange ABCD sont idP; $S_{(AC)}$;$S_{(BD)}$ et S_O.

Exercice 5 1) Soit f une isométrie laissant invariant {B, C, C'}.

Si f(B) =B, f(C) =C et f(C') =C' comme B,C et C' sont non alignés alors f=idP

2) $f(B) \in \{B,C,C'\}$.Supposons que f(B) =C alors $f(C) \in \{C',B\}$.

Si f(C) =C' alors BC =CC' ce qui est impossible car BCC' est rectangle en B donc $f(C) \neq C'$.Si f(C) =B alors f(C') =C' d'où CC' =BC' impossible donc $f(C) \neq B$ et par suite $f(B) \neq C$.

3)Supposons que f(B) =C' alors $f(C) \in \{B,C\}$.

Si f(C) =B alors f(C') =C, par suite CC' =BC' impossible.

Si f(C) =C alors CB =CC' ce qui est impossible, par suite $f(B) \neq C'$ et comme on a $f(B) \neq C$ donc f(B) =B et f(C) =C' et f(C') =C par suite f soit une rotation de centre B, soit une symétrie orthogonale d'axe Δ =med[CC']. Et Comme $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC'}\right) \not\equiv \left(\overrightarrow{BC'},\overrightarrow{BC}\right)[2\pi]$

donc f n'est pas une rotation.

Conclusion: les isométries laissant invariant $\{B,C,C'\}$ sont idP et S_Δ avec Δ =med[CC'].

Exercice 6: 1) $R_1 = R_{\left(C,\frac{\pi}{3}\right)}$ $\left.(CO) \cap (CB) = \{C\} ; 2\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$ donc $R_1 = S_{(CB)} \circ S_{(OC)}$; $\Delta_1 = (BC)$

2) $R_2 = R_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)}$

On a: $\left.\begin{array}{l}(OI) \cap (OC) = \{O\} \\ 2\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]\end{array}\right\}$ donc $R_2 = S_{(OC)} \circ S_{(OI)} = S_{(BC)} \circ S_{(OI)}$ $\Delta_2 = (OI)$

3) $R_1 \circ R_2 = S_{(BC)} \circ S_{(OC)} \circ S_{(OC)} \circ S_{(OI)} = S_{(BC)} \circ S_{(OI)}$

On a $(CB) \perp (OI)$ en I donc $S_{(BC)} \circ S_{(OI)} = S_I$ et par suite $R_1 \circ R_2 = S_I$

4) $R_3 = S_\Delta \circ S_{(BC)}$, $\left.\begin{array}{l}(AB) \perp (CK) \\ \Delta \perp (AB)\end{array}\right\} \Delta // (CK)$. On a (CK) coupe (BC) alors Δ et (BC) sont sécantes; soit E un point de Δ distinct de B ; On a $S_\Delta \circ S_{(BC)} = R_{\left(B,2\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}}\right)\right)}$. On a $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CK}\right)[\pi] \equiv \frac{-\pi}{6}[\pi]$ donc

$R_3 = R_{\left(B,\frac{-\pi}{3}\right)}$; $R_3 \circ R_1 = \left(S_\Delta \circ S_{(BC)}\right) \circ \left(S_{(BC)} \circ S_{(OC)}\right) = S_\Delta \circ S_{(OC)}$, (OC) et Δ sont parallèles par suite

$S_\Delta \circ S_{(OC)}$ est une translation . Comme on a $K \in (OC)$ et B le projeté orthogonal de K sur Δ donc

$R_3 \circ R_1 = S_\Delta \circ S_{(OC)} = t_{2\overrightarrow{KB}} = t_{\overrightarrow{AB}}$

5)a)On a $R_1 = R_{\left(C,\frac{\pi}{3}\right)}$ donc $R_1^{-1} = R_{\left(C,\frac{-\pi}{3}\right)}$, $f = R_1^{-1} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = R_{\left(C,\frac{-\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$ or

$\left.\begin{array}{l}(CA) \cap (CO) = \{C\} \\ 2\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CA}\right) \equiv \frac{-\pi}{3}[2\pi]\end{array}\right\}$ donc $R_{\left(C,\frac{-\pi}{3}\right)} = S_{(CA)} \circ S_{(CO)}$, (OC) est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ donc $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(OC)} \circ S_{\Delta'}$ avec

Δ' est la droite parallèle à (OC) passant par le point $A = t_{\overrightarrow{KA}}(K)$.,

$f = R\left(C,\frac{-\pi}{3}\right) \circ t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(CA)} \circ S_{(CO)} \circ S_{(CO)} \circ S_{\Delta'} = C_{(CA)} \circ S_{\Delta'}$. Or $\Delta' \cap (AC) = \{A\}$

donc $f = R_{\left(A,2\left(\overrightarrow{AE'},\overrightarrow{AC}\right)\right)}$ avec E' un point de Δ' distinct de A.

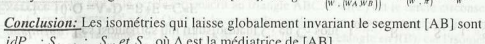
$\Delta' // (OC)$; $(\overrightarrow{AE'},\overrightarrow{AC}) \equiv 2(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CA})[\pi] \equiv \frac{-\pi}{6}[\pi]$ donc $S_{(CA)} \circ S_{\Delta'} = R_{(A,\frac{-\pi}{3})}$. En fin $f = R_{(A,\frac{-\pi}{3})}$

b)- on a d'après 5) a) $f = R_1^{-1} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = R_{(A,\frac{-\pi}{3})} \Rightarrow R_1 \circ R_1^{-1} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = R_1 \circ R_{(A,\frac{\pi}{3})}$ or $R_1 \circ R_1^{-1} = idP$ donc

$t_{\overrightarrow{AB}} = R_1 \circ R_{(A,\frac{-\pi}{3})}$. $R_1 \circ R_{(A,\frac{-\pi}{3})}(M') = R_1(M) = M''$ or $R_1 \circ R_{(A,\frac{-\pi}{3})} = t_{\overrightarrow{AB}}$ donc $t_{\overrightarrow{AB}}(M') = M''$;

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M'M''}$ et par suite ABM''M' est un parallélogramme.

Exercice 7: 1)a- ABC un triangle isocèle en A, le seul coté de ABC isométrique à *[BC]* est le segment *[BC]* lui même d'où *f([BC]) = [BC]*, donc *f(B) = B* et *f(C) = C* ou *f(B) = C* et *f(C) = B* c'est-à-dire: $f(\{B,C\}) = \{B,C\}$.



b- f conserve le milieu ; comme O est le milieu de [BC] alors f(O) est le milieu de f([BC]) =[BC]. ; f(O) =O.f laisse globalement invariant le triangle ABC

donc l'ensemble {A, B, C}; de plus f est bijective et $f(\{B,C\}) = \{B,C\}$

donc $f(A) \neq B$ et $f(A) \neq C$ donc $f(A) = A$.

c- d'après 1)-b- si f une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABC alors f fixe A et O, donc f =idP ou f =$S_{(AO)}$.

2)a- $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BC}$ alors $t_{(CB)}(A') = A$; $t_{\overrightarrow{CB}}(C') = C$ et $t_{\overrightarrow{CB}}(C) = B$ donc $t_{\overrightarrow{CB}}(A'CC') = ACB$.

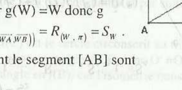
On a $g(ABC) = A'CC'$ $t_{\overrightarrow{CB}} \circ g(ABC) = t_{\overrightarrow{CB}}[g(ABC)] = t_{\overrightarrow{CB}}(A'CC') = ACB$ donc $t_{\overrightarrow{CB}} \circ g$ est une isométrie qui laisse ABC globalement invariant.

b) d'après 1) $t_{\overrightarrow{CB}} \circ g$ laisse ABC globalement invariant, alors $t_{\overrightarrow{CB}} \circ g = idP$ ou $t_{\overrightarrow{CB}} \circ g = S_{(AO)} \Rightarrow g = t_{\overrightarrow{BC}}$ ou $g = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AO)}$. Soit Δ la perpendiculaire à (BC) en C, C le projeté orthogonal de O sur Δ

$t_{\overrightarrow{BC}} = S_\Delta \circ S_{(AO)}$, $g = S_\Delta \circ S_{(AO)} \circ S_{(AO)} = S_\Delta$.

Conclusion: Les isométries qui transforme ABC en A'CC' sont: $t_{\overrightarrow{BC}}$ *et* S_Δ.

Exercice 8: Soit g une isométrie qui laisse globalement invariant [AB] alors (g(A) =A et g(B) =B) ou (g(A) =B et g(B) =A).. Soit W =A*B ; on a g(W) =g(A)*g(B) =A*B =W car l'isométrie conserve le milieu.



- si g(A) =A et g(B) =B alors g est une isométrie qui fixe deux points distincts A et B donc g =idP.
- Si g(A) =B et g(B) =A alors $g \neq idP$ car $A \neq B$; or g(W) =W donc g est symétrie orthogonale d'axe Δ =med[AB], ou $g = R_{(W,(\overrightarrow{WA},\overrightarrow{WB}))} = R_{(W,\pi)} = S_W$.

Conclusion: Les isométries qui laisse globalement invariant le segment [AB] sont idP ; $S_{(AB)}$; S_W *et* S_Δ où Δ est la médiatrice de [AB].

2)a) $f \in F$ et f transforme [AB] en [CD] donc(f(A) =C et f(B) =D) ou (f(A) =D et f(B) =C).

Si f(A) =C et f(B) =D on: $\left.\begin{array}{l} t_{\overrightarrow{DA}} \circ f(A) = t_{\overrightarrow{DA}}(C) = B \\ t_{\overrightarrow{DA}} \circ f(B) = t_{\overrightarrow{DA}}(D) = A \end{array}\right\}$ *alors* $t_{\overrightarrow{DA}} \circ f([AB]) = [AB]$.

Si f(A) =D et f(B) =C on a: $\left.\begin{array}{l} t_{\overrightarrow{DA}} \circ f(A) = t_{\overrightarrow{DA}}(D) = A \\ t_{\overrightarrow{DA}} \circ f(B) = t_{\overrightarrow{DA}}(C) = B \end{array}\right\} \Rightarrow t_{\overrightarrow{DA}} \circ f([AB]) = [AB]$; $t_{\overrightarrow{DA}} \circ f \in E$.

b- on a $t_{\overrightarrow{DA}} \circ f \in E$; $t_{\overrightarrow{DA}} \circ f \in \{idP ; S_{(AB)} ; S_W ; S_\Delta\}$ avec Δ= med[AB].

$f \in \{t_{\overrightarrow{AD}} ; t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(AB)} ; t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_W ; t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_\Delta\}$, $F = \{t_{\overrightarrow{AD}} ; t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(AB)} ; t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_W ; t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_\Delta\}$

$(AB) \parallel (OI)$, I le projeté orthogonale de A sur (IO) donc $t_{2\overrightarrow{AI}} = S_{(OI)} \circ S_{(AB)}$ par suite

$t_{\overrightarrow{AD}} = S_{(OI)} \circ S_{(AB)}$ donc $t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(AB)} = S_{(OI)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} = S_{(OI)}$. Δ =med[AB] ; $\Delta \perp (AB)$ en W donc $S_W = S_{(AB)} \circ S_\Delta$, $t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_W = S_{(OI)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_\Delta = S_{(OI)} \circ S_\Delta$ or (OI$\perp$) Δ en O donc $S_{(OI)} \circ S_\Delta = S_O$,

$S_{\overrightarrow{AD}} \circ S_W = S_O$. $F = \{t_{\overrightarrow{AD}} ; S_O ; S_{(OI)} ; t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_\Delta\}$

3) $f \in G$ alors $f(\{A,B,D\}) = \{B,C,D\}$ Notons A', B' et D' les images respectives de A , B et D par f ; l'image du segment [BD] est un segment [B'D'] tel que BD =B'D' et [B'D'] est un coté du triangle BCD, or le seul coté du triangle BCD isométrique à [BD] est [BD] d'où f([BD]) =[BD].Deux cas sont possible f(B) =B et f(D) =D ou f(B) =D et f(D) =B donc f({B, D}) ={B, D}Or f({A, B, D} ={B, C, D} et f bijective donc f(A) ne peut être ni A ni D donc f(A) =C.

O est invariant par f car O =B*D donc f(O) =f(B)*f(D) =B*D. ; f(O) =O

f fixe O et $f \neq$ idP car f(A) =C $\neq$ A donc f soit une rotation de centre O et d'angle $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) \equiv \pi[2\pi]$ soit une symétrie orthogonale d'axe Δ_1=med[AC]. $f = S_O$ ou $f = S_\Delta = \text{med}[AC]$,or

$S_O(A) = C$; $S_O(B) = D$; $S_O(D) = B$ donc S_O convient $S_{\Delta_1}(O) = O$; $S_{\Delta_1}(A) = C$; $S_{\Delta_1}(B) \neq \{B,D\}$ car ABCD un rectangle non carré donc $G = \{S_O\}$.

4) Vérifier que l'ensemble des isométries qui laisse globalement invariant ABCD est: S_O ; S_Δ ; $S_{\Delta'}$ avec Δ =méd[AB] et Δ' =méd[AD].

Exercice 9: 1)C_1 et C_2 deux cercles de même rayon, donc sont isométriques. Si *f* est une isométrie qui transforme C1 en C2 alors *f*(O_1) =O_2., *f* est une isométrie donc *f* soit l'identité du plan, soit une translation, ou bien une rotation , ou une symétrie glissante. On a $f \neq id_P$ car $f(O_1) = O_2 \neq O_1$.

si f est une translation alors $f = t_{\overrightarrow{O_1O_2}}$. on a $f(O_1) = t_{\overrightarrow{O_1O_2}}(O_1) = O_2$ donc *f*(C_1) est un cercle de centre O_2 et de même rayon que C_1 d'où *f*(C_1) =C_2.

si *f* est une rotation alors sont centre Ω est un point de la droite Δ médiatrice du segment [O_1O_2] est son angle est $(\overrightarrow{\Omega O_1},\overrightarrow{\Omega O_2})$.

soit Ω un point quelconque de Δ:, on a $R(\Omega,(\overrightarrow{\Omega O_1},\overrightarrow{\Omega O_2}))(O_1) = O_2$ et comme C_1 et C_2 sont de même rayon alors $R(\Omega,(\overrightarrow{\Omega O_1},\overrightarrow{\Omega O_2}))(\zeta_1) = \zeta_2$.

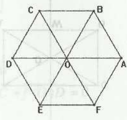
si *f* est une symétrie axiale alors son axe est la droite Δ= méd[O_1O_2] $S_\Delta(O_1)$ =O_2 alors $S_\Delta(C_1)$ =C_2 car C_1 et C_2 sont de même rayon.

si *f* est une symétrie glissante alors son axe Δ' passe par I =O_1*O_2.Soit Δ' une droite quelconque autre que Δ passant par I =O_1*O_2, on pose A et B les projetés orthogonaux respectifs des points O_1 et O_2 sur Δ' et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; on a donc $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ'.

$O_2 = S_{\Delta'}(O_1)$ alors $O_2 = t_{\vec{u}}(O_1) = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta'}(O_1) \Rightarrow t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta'}(\xi_1) = \xi_2$

Conclusion: Les isométries qui transforment C_1 en C_2 sont $t_{\overrightarrow{O_1O_2}}$, $R_{(\Omega,\theta)}$, S_Δ, $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta'}$.

Exercice 10: O =A*D =B*E =C*F.



$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$ donc :

$\overrightarrow{f(O)f(A)} + \overrightarrow{f(O)f(B)} + \overrightarrow{f(O)f(C)} + \overrightarrow{f(O)f(D)} + \overrightarrow{f(O)f(E)} + \overrightarrow{f(O)f(F)} = \vec{0}$ (*)

Or $\{f(A), f(B), f(C), f(D), f(D), f(E), f(F)\} = \{A,B,C,D,E,F\}$

donc (*) donne $\overrightarrow{f(O)A} + \overrightarrow{f(O)B} + \overrightarrow{f(O)C} + \overrightarrow{f(O)D} + \overrightarrow{f(O)E} + \overrightarrow{f(O)F} = \vec{0}$

$6\overrightarrow{f(O)O} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) = \vec{0}$ donc $6\overrightarrow{f(O)O} + \vec{0} = \vec{0}$ signifie $6\overrightarrow{f(O)O} = \vec{0}$.*f*(O) =O

Si f une isométrie qui laisse globalement invariant $\{A,B,C,D,E,F\}$ alors *f*(O) =O et f admet un point invariant, donc f ne peut être qu'une rotation de centre O ou une symétrie axiale par rapport à une droite passant par O.

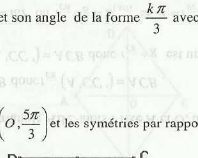
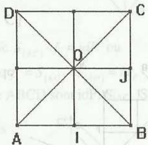
b)Si f est une rotation tel que $f(A) \in \{A,B,C,D,E,F\}$ son centre O et son angle de la forme $\frac{k\pi}{3}$ avec $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$.Si f est une symétrie par rapport à une droite Δ

donc $\Delta \subset \{(AD),(BE),(CF),\text{méd}[AB],\text{méd}[BC],\text{méd}[CD]\}$.

Réciproquement: les 12 isométries

$R(O,0) = idP$; $R\left(O,\frac{\pi}{3}\right)$; $R\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)$; $R(O,\pi) = S_O$; $R\left(O,\frac{4\pi}{3}\right)$; $R\left(O,\frac{5\pi}{3}\right)$ et les symétries par rapport à: (AD) ; (BE) ; (CF) ; méd[AB] ; méd[BC] ; méd[CD] conservent globalement invariant l'ensemble .

Exercice N° 11 :

ABCD est un carré; $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1) $f = S_{(CB)} \circ S_{(OC)}$ On a: $(CB) \cap (OC) = \{C\}$, donc $f = R_{(C;2(\overrightarrow{CO};\overrightarrow{CB}))}$

On a: $2(\overrightarrow{CO};\overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB})[\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ On conclut: $f = R_{(C;\frac{\pi}{2})}$.

$g = S_{(OC)} \circ S_{(OJ)} = \{O\}$ donc $g = R_{(O;2(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OC}))}$ On a: $2(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OC}) \equiv (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On conclut: $g = R_{(O;\frac{\pi}{2})}$.

* $h = S_{(OJ)} \circ S_{(DC)}$.Les droites (OJ) et (DC) sont parallèles, donc h est une translation; J est le projeté orthogonal de C sur (OJ); on conclut: $h = t_{2\overrightarrow{CJ}} = t_{\overrightarrow{CB}}$.

* $K = S_{(OA)} \circ S_O \circ S_{(OD)}$.Les droites (OA) et (OD) sont perpendiculaires en O; on peut alors écrire:

$S_O = S_{(OA)} \circ S_{(OD)}$. $K = S_{(OA)} \circ (S_{(OA)} \circ S_{(OD)}) \circ S_{(OD)} = (S_{(OA)} \circ S_{(OA)}) \circ (S_{(OD)} \circ S_{(OD)}) = idP \circ idP \Rightarrow K = idP$.

2) $f \circ g = (S_{(CB)} \circ S_{(OC)}) \circ (S_{(OC)} \circ S_{(OJ)}) = S_{(CB)} \circ (S_{(OC)} \circ S_{(OC)}) \circ S_{(OJ)} = S_{(CB)} \circ S_{(OJ)}$ On a: (CB) et (OJ) sont perpendiculaires en J, donc $S_{(CB)} \circ S_{(OJ)}$ est la symétrie centrale de centre J. il on résulte que $f \circ g = S_J$.

$g \circ h = (S_{(OC)} \circ S_{(OJ)}) \circ (S_{(OJ)} \circ S_{(DC)}) = S_{(OC)} \circ (S_{(OJ)} \circ S_{(OJ)}) \circ S_{(DC)} = S_{(OC)} \circ S_{(DC)}$

On a: $(OC) \cap (DC) = \{C\}$ donc $S_{(OC)} \circ S_{(DC)} = R_{(C;2(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CO}))}$, On a: $2(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CO}) \equiv (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc $g \circ h = R_{(C;\frac{\pi}{2})} = f$.

Exercice N° 12 : a- (AB)//(IJ) ; I le projeté orthogonal de B sur (IJ) donc $t_{2\overrightarrow{BI}} = S_{(IJ)} \circ S_{(AB)}$

$\Rightarrow t_{\overrightarrow{BC}} = S_{(IJ)} \circ S_{(AB)}$; $t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AB)} = S_{(IJ)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} = S_{(IJ)}$

b- $f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)} = t_{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})} \circ S_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AB)} = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(IJ)}$

on a $\overrightarrow{AB}$ un vecteur directeur de (IJ) donc f est une symétrie glissante d'axe (IJ) et de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice N° 13 : 1) Soit $M_1(x_1,y_1)$ *et* $M_2(x_2,y_2)$ deux points du plan d'images respectives

$M'_1(x'_1,y'_1)$ *et* $M'_2(x'_2,y'_2)$. $x'_2 - x'_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 - y_1)$; $y'_2 - y'_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y_2 - y_1)$

;

$M'_1M'^2_2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 - y_1)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(x_2 - x_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y_2 - y_1)\right]^2 -$

$= \frac{3}{4}(x_2 - x_1)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + \frac{1}{4}(y_2 - y_1)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + \frac{3}{4}(y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^2$

$M'_1M'^2_2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = M_1M_2^2 \Rightarrow M'_1M'_2 = M_1M_2$, f est une application du plan qui conserve les distances donc f est une isométrie du plan.

2) M(z) est invariant par f $\Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow M' = M \Leftrightarrow x' = x$ *et* $y' = y \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 = x \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 - \sqrt{3} = y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}-2)x - y = -2 \\ x + (\sqrt{3}-2)y = 2\sqrt{3} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (\sqrt{3}-2)x + 2 \\ x + (\sqrt{3}-2)y = 2\sqrt{3} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$.Donc le point I(0;2) est l'unique point invariant par f.

3) f admet un unique point invariant $I(0;2)$, donc f est une rotation de centre I et d'angle non nul.

4) I est d'affixe $2i$. On a $O(0) \Rightarrow O'\left(1+\left(2-\sqrt{3}\right)i\right)$; $\left(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IO'}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_{O'}-z_I}{z_O-z_I}\right)[2\pi]$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IO'}\right) \equiv \arg\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{-2i}\right)[2\pi] \Rightarrow \left(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IO'}\right) \equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)[2\pi] \Rightarrow \left(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IO'}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$. Enfin f est une rotation de centre $I(0;2)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$

Exercice N° 14 : Si $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$; $f(M_1)=M'_1(z'_1)$ et $f(M_2)=M'_2(z'_2)$; On a

$M'_1M'_2=\left|z'_2-z'_1\right|=\left|\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\overline{z_2}-\overline{z_1}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\left|\overline{z_2-z_1}\right|=1\left|z_2-z_1\right|=M_1M_2$ d'où f est une application qui conserve les distances donc f est une isométrie.

$M(z)$ est invariant par f $\Leftrightarrow z'=z \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=z \Leftrightarrow x+iy=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-iy)-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{3}{2}y=-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$. Donc l'ensemble des points fixes par f est la droite $\Delta : \frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

Exercice N° 15 : 1) Soit $M_1(x_1,y_1)$ et $M_2(x_2,y_2)$ deux points du plan d'images respectives $M'_1(x'_1,y'_1)$ et $M'_2(x'_2,y'_2)$. On a $x'_2-x'_1=(1-y_2)-(1-y_1)=y_1-y_2$;

$y'_2-y'_1=(2-x_2)-(2-x_1)=x_1-x_2$; $M'_1M'^2_2=\left(x'_2-x'_1\right)^2+\left(y'_2-y'_1\right)^2=\left(y_1-y_2\right)^2+\left(x_1-x_2\right)^2$;

$M'_1M'^2_2=\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2=M_1M_2^2$, f est une transformation qui conserve les distances , donc f est une isométrie du plan.

2) $M(z)$ est invariant par f $\Leftrightarrow f(M)=M \Leftrightarrow M'=M \Leftrightarrow x'=x$ et $y'=y \Leftrightarrow \begin{cases} 1-y=x \\ 2-x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ ce qui est impossible. Donc f ne possède aucun point invariant.

3) f est une isométrie qui n'admet aucun point invariant donc f est soit une translation de vecteur non nul soit une symétrie glissante. Or pour tout $M(x,y)$ d'image $M'(x',y')$ par f, On a

$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} 1-y-x \\ 2-x-y \end{pmatrix}$ donc les coordonnées de $\overrightarrow{MM'}$ ne sont pas constantes et par suite f n'est pas une translation et par suite f est une symétrie glissante.

Exercice 16 : *1)* a- soit C le cercle circonscrit au triangle ABC.C' =f(C) est le cercle circonscrit au tringle ACD ; C' est de centre O' =*f*(O).Or O est le centre du cercle circonscrit au triangle ACD donc O' =O , *f*(O)=O , ABC est rectangle en B donc *f*(ABC) est un triangle rectangle en *f*(B), car l'isométrie conserve

l'orthogonalité. Puisque *f*(ABC) =ACD et ACD rectangle en D, donc *f*(B) =D.

b- *f*(O) =O $\Rightarrow$ *f* est une isométrie fixe O, donc *f* soit l'identité du plan, soit une symétrie orthogonale d'axe passe par O, ou une rotation de centre O. comme *f*(B) =D $\neq B$ donc $f \neq idP$. $f=S_{(AC)}$ ou $f=R_{(O;\pi)}=S_O$.

2) $t_{\overrightarrow{AD}}=S_{(OI)}\circ S_{(AB)}$, $g_1=t_{\overrightarrow{AD}}\circ S_{(AB)}=S_{(OI)}\circ S_{(AB)}\circ S_{(AB)}=S_{(OI)}$

$g_2=t_{\overrightarrow{AC}}\circ S_{(AB)}=t_{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}}\circ S_{(AB)}=t_{\overrightarrow{DC}}\circ t_{\overrightarrow{AD}}\circ S_{(AB)}=t_{\overrightarrow{DC}}\circ S_{(OI)}$, et comme $\overrightarrow{DC}$ est un vecteur directeur de (OI) alors g_2 est une symétrie glissante.

Exercice 17 :

1)a)

$g(B)=f\left[t_{\overrightarrow{BA}}(B)\right]=f(A)=I$ et $g(K)=f\left[t_{\overrightarrow{BA}}(K)\right]=f(I)=K$

b) $\left.\begin{matrix} g \text{ est une isométrie} \\ g(K)=K \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ g est une rotation de centre K ou bien une symétrie orthogonale d'axe passant par K.

1er cas : $g=r_{(K,\alpha)}$. $g(B)=I \Rightarrow \alpha \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KI}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}}\right)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \Rightarrow g=r_{\left(K,-\frac{\pi}{3}\right)}$

2ème cas : $g=S_{(Kx)}$. $g(B)=I \Rightarrow (Kx)=\text{méd}[BI]=(AK) \Rightarrow g=S_{(AK)}$. ***Conclusion :*** $g=R_{\left(K,-\frac{\pi}{3}\right)}$ ou $g=S_{(AK)}$

c) $g=f\circ t_{\overrightarrow{BA}} \Leftrightarrow f=g\circ t_{\overrightarrow{AB}}$ d'où $f=S_{(AK)}\circ t_{\overrightarrow{AB}}$ ou $f=r_{\left(K,-\frac{\pi}{3}\right)}\circ t_{\overrightarrow{AB}}$.

2)a) $\Delta=(Kx)$ tel que: $\left(\widehat{\overrightarrow{KB},\overrightarrow{Kx}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \Rightarrow \Delta=(KH)$. $\Delta'=(By)$ tel que: $\left(\widehat{\overrightarrow{BK},\overrightarrow{By}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \Rightarrow \Delta'=(BO)$.

b) $R_{\left(K,-\frac{\pi}{3}\right)}\circ R_{\left(B,-\frac{\pi}{3}\right)}=S_{(KH)}\circ S_{(BK)}\circ S_{(BK)}\circ S_{(BO)}=S_{(KH)}\circ S_{(BO)}$ d'autre part :

$(KH)\perp(AB)$, $(BO)\perp(KI)$ et $(KI)//(AB) \Rightarrow (KH)//(BO)$

donc $R_{\left(K,-\frac{\pi}{3}\right)}\circ R_{\left(B,-\frac{\pi}{3}\right)}$ est une translation. En plus B se projette orthogonalement en H sur (HK)

donc $R_{\left(K,-\frac{\pi}{3}\right)}\circ R_{\left(B,-\frac{\pi}{3}\right)}=t_{2\overrightarrow{BH}}=t_{\overrightarrow{AB}}$ .c) $f_1=R_{\left(K,-\frac{\pi}{3}\right)}\circ t_{\overrightarrow{AB}}=\underbrace{R_{\left(K,-\frac{\pi}{3}\right)}\circ R_{\left(K,\frac{\pi}{3}\right)}}_{IdP}\circ R_{\left(B,-\frac{\pi}{3}\right)} \Rightarrow f_1=R_{\left(B,-\frac{\pi}{3}\right)}$.

3) a) $f_2(B')=S_{(AK)}\left(t_{\overrightarrow{AB}}(B')\right)=S_{(AK)}(I)$ car $\overrightarrow{B'I}=\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{AB} \Rightarrow f_2(B')=B$.

$f_2(B)=S_{(AK)}\left(t_{\overrightarrow{AB}}(B)\right)=S_{(AK)}(D)=C$ car $(AK)=\text{méd}[DC] \Rightarrow f_2(B)=C$. $f_2(A)=I$

b) Vérifier que f_2 et $t_{\overrightarrow{JO}}\circ S_{(JO)}$ deux isométries coïncident sur 3 points non alignes A ,B et B'.

4) a) $\varphi(A)=f_2^{-1}(f_1(A))=f_2^{-1}(I)=A$, $\varphi(I)=f_2^{-1}(f_1(I))=f_2^{-1}(K)=I$ et $\varphi(B)=f_2^{-1}(f_1(B))=f_2^{-1}(B)=B'$.

φ est une isométrie $\varphi \neq Id_P$ car $\varphi(B)\neq B$ et φ fixe deux points distincts A et I $\Rightarrow \varphi=S_{(AI)}$.

b) $f_1(M)=f_2(M) \Leftrightarrow f_2^{-1}(f_1(M))=M \Leftrightarrow S_{(AI)}(M)=M \Leftrightarrow M\in(AI)$ d'où l'ensemble cherché est la droite (AI).

SOLUTION DES EXERCICES RELATIFS AU CHAPITRE

****

Exercice 1: 1) vrai ; f est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{6}$ et g est un déplacement d'angle $-\frac{\pi}{6}$ .Donc $f\circ g$ est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=0$ d'où $f\circ g$ est une translation.

2) Vrai car $\frac{1-i}{\sqrt{2}}=e^{-i\frac{\pi}{4}}\neq 1$ et $\left|e^{-i\frac{\pi}{4}}\right|=1$ 3) vrai, (théorème)

4) Faux : $\vec{u}$ vecteur directeur de Δ donc $t_{\vec{u}}\circ S_\Delta$ est symétrie glissante n'admet pas aucun point fixe.

5) faux contre exemple on considère un carré ABCD de centre O et I=A*B $t_{\overrightarrow{AB}}\circ S_{(OI)}=S_{(AD)}\circ S_{(OI)}\circ S_{(OI)}=S_{(AD)}$.

6) Vrai : $f\circ g^{-1}(B)=f(A)=B$ f déplacement et g antidéplacement donc $f\circ g^{-1}$ antidéplacement qui fixe B; par suite $f\circ g^{-1}$ est une symétrie orthogonale .

7) V rai soit $s_{(O;\vec{u})}: M(Z)\rightarrow M'(Z')$ telque $Z'=\overline{Z}$ avec $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé.et $t_{\vec{w}}: M(z)\rightarrow M'(z'): z'=z+1$;f= $t_{\vec{w}}\circ S_{(O;\vec{u})}$; $f=S_\Delta\circ S_{(O;\vec{u})}\circ S_{(O,\vec{u})}=S_\Delta$ avec Δ =med[OA]

8) Vrai

Exercice 2: 1)b) ; 2) c) ; 3) c) ; 4) a) ; 5) a) ; 6) c) ; 7) b ; 8) c ; 9)b)

Exercice 3 : f est un déplacement d'angle

$(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC})+(\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI}) \equiv (\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC})+(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI})[2\pi]$
$\equiv (\overrightarrow{IB},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{IB},\overrightarrow{BI})[2\pi] \equiv \pi[2\pi]$

Comme $\pi\neq 0[2\pi]$ f est une rotation d'angle π

donc f est une symétrie centrale

b- on a $\left.\begin{matrix} (IC)\cap(IJ)=\{I\} \\ 2(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IC})\equiv(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC})[2\pi] \end{matrix}\right\}$ donc $R_1=S_{(IC)}\circ S_{(IJ)}=S_{(IC)}\circ S_{\Delta_1}$

$(IC)\cap(CJ)=\{C\}$ et $2\left(\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CJ}\right)=\left(\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CB}\right)[2\pi]$ donc

$R_2=S_{(CJ)}\circ S_{(IC)}=S_{(\Delta_2)}\circ S_{(IC)} \Rightarrow R_2\circ R_1=S_{\Delta_2}\circ S_{(IC)}\circ S_{(IC)}\circ S_{\Delta_1}=S_{\Delta_2}\circ S_{\Delta_1}$

c- $f(J)=R_3\circ R_2\circ R_1(J)=R_3\circ S_{\Delta_2}\circ S_{\Delta_1}(J)=R_3(J)$ car $J\in\Delta_1\cap\Delta_2$

$\left.\begin{matrix} (BI)\cap(BJ)=\{B\} \\ 2(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{BI})\equiv(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI})[2\pi] \end{matrix}\right\}$ donc $R_3=S_{(BI)}\circ S_{(BJ)}=S_{(BI)}\circ S_{\Delta_3}$; $f(J)=S_{(BI)}\circ S_{\Delta_3}(J)=S_{(BI)}(J)=J_1$

2) a) Ω le centre de f . on a f est une symétrie centrale donc $f=S_\Omega$; or $f(J)=J_1$ donc $\Omega=J_1*J$

b- On a $S_{(IB)}(J)=J_1$ donc $\Omega=J*J_1\in(IB)$ donc (IB) est tangente en Ω au cercle inscrit au triangle ABC.

Exercice 4: 1) AB = CD et CD $\neq 0$ donc il existe un unique déplacement qui transforme A en C et B en D,

donc $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\pi[2\pi]$, $\pi\neq 2k\pi$ donc f est une rotation d'angle π ; f est une symétrie centrale de centre O=A*C.

2) a- $f_1=S_{(DE)}\circ S_{(BE)}$: $\begin{cases} (DE)\cap(BE)=\{E\} \\ 2\left(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{ED}\right)=-\frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ donc $f_1=R_{\left(E;\frac{-2\pi}{3}\right)}$

b- $f_2(D)=R_{\left(B;\frac{\pi}{6}\right)}\circ R_{\left(E;\frac{\pi}{3}\right)}(D)=B$, $R_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}$ déplacement d'angle $\frac{\pi}{3}$ et $R_{\left(B;\frac{\pi}{6}\right)}$ déplacement d'angle $\frac{\pi}{6}$ d'où f_2 est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\neq 2k\pi$ donc f_2 est une rotation r d'angle $\frac{\pi}{2}$ soit le centre de r $\begin{cases} (\overrightarrow{\omega D};\overrightarrow{\omega B})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \omega D=\omega B \end{cases}$ or $\begin{cases} (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ CD=CB \end{cases}$ donc $\omega=C$ Par suite f_2 rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre C

c- $f_3=r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$; $f_3^{-1}=r_{\left(O;\frac{-\pi}{2}\right)}$; $f_2\circ f_3^{-1}(A)=f_2(D)=B$; f_3^{-1} déplacement d'angle $\frac{-\pi}{2}$ et f_2 déplacement d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $f_2\circ f_3^{-1}$ est une translation . Comme $f_2\circ f_3^{-1}(A)=B$ alors $f_2\circ f_3^{-1}=t_{\overrightarrow{AB}}$

3) a- $M=S_A(B)$; $f_3=r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$ $f_3(MD)$ est une droite passant par $f_3(D)=A$ et perpendiculaire à (MD) donc $f_3(MD)=\Delta$; $f_3(AB)=(BC)$

$M\in(MD)\cap(AB) \Rightarrow f_3(M)\in f_3(MD)\cap f_3(AB) \Rightarrow f_3(M)\in\Delta\cap(BC) \Rightarrow M_1\in\Delta\cap(BC) \Rightarrow f_3(M)=M_1$

b) $f_2\circ f_3^{-1}(M_1)=f_2(M)=M_2$ signifie $t_{\overrightarrow{AB}}(M_1)=M_2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{M_1M_2} \Rightarrow ABM_2M_1$ est un parallélogramme

4) $g=t_{\overrightarrow{AM_1}}\circ S_{(OA)}=S_{\Delta_1}\circ S_{(OA)}\circ S_{(OA)}=S_{\Delta_1}$ avec Δ_1= med[AM₁] $g=S_{\Delta_1} \Rightarrow$ g est une symétrie orthogonale.

Exercice 5: 1) a) $M(z_1)$; $M_2(z_2)$; $A(1)$; $B(i)$; $M(z)$

$M_1 = R_{\left(A;-\frac{\pi}{6}\right)}(M) \Leftrightarrow z_1 - 1 = e^{-i\frac{\pi}{6}}(z-1) \Leftrightarrow z_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}}z + 1 - e^{-i\frac{\pi}{6}}$ d'où $z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)z + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$M_2 = R_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)}(M) \Leftrightarrow z_2 - i = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i) \Leftrightarrow z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}z + i - ie^{i\frac{\pi}{3}}$ d'où $z_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

b) $\frac{z_2 - i}{z_1 - 1} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)}{e^{-i\frac{\pi}{6}}(z-1)} = e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{(z-i)}{(z-1)} = i\frac{(z-i)}{(z-1)}$

2) a) $\frac{z_2 - i}{z_1 - 1} = i\left(\frac{z-i}{z-1}\right)$ alors $\arg\left(\frac{z_2-i}{z_1-1}\right) = \arg(i) + \arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM_1};\overrightarrow{BM_2}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)[2\pi]$

b) $E = \{M \in P \ tel\ que : (AM_1)//(BM_2)\} \Leftrightarrow M \in E \Leftrightarrow (AM_1)//(BM_2)$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM_1};\overrightarrow{BM_2}) \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow M \in \zeta_{[AB]}/\{A;B\}$, alors $E = \zeta_{[AB]}/\{A;B\}$.

c) $M_2 = t_{\overrightarrow{AB}}(M_1) \Leftrightarrow z_2 - z_1 = i - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)z + \sqrt{3} - 1 = i - 1$

$\Leftrightarrow z(1+i)(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\sqrt{3} + i \Leftrightarrow z = \frac{(-\sqrt{3}+i)\times 2}{(1+i)(1+i\sqrt{3})} \Leftrightarrow z = \frac{2i(1+i\sqrt{3})}{(1+i)(1+i\sqrt{3})} = \frac{2i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1+i} = 1+i$

3) $M_1 = R_{\left(A;-\frac{\pi}{6}\right)}(M) \Leftrightarrow M = R_{\left(A;\frac{\pi}{6}\right)}(M_1)$; $M_2 = R_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)}(M) = R_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)}\left(R_{\left(A;\frac{\pi}{6}\right)}(M_1)\right)$;

$M_2 = R_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(A;\frac{\pi}{6}\right)}$; $M_2 = \varphi(M_1)$ avec $\varphi = R_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(A;\frac{\pi}{6}\right)}$ $M'' = \varphi(M) = R_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)}(M')$ avec $M' = R_{\left(A;\frac{\pi}{6}\right)}(M)$

donc M' à pour affixe $z' = e^{i\frac{\pi}{6}}(z-1)+1$ $M'' = R_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)}(M')$ a pour affixe $z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z'-i)+i$

$= e^{i\frac{\pi}{3}}\left[e^{i\frac{\pi}{6}}(z-1)+1-i\right]+i = e^{i\frac{\pi}{2}}z - e^{i\frac{\pi}{2}} + (1-i)e^{i\frac{\pi}{3}} + i = iz + (1-i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= iz + \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$ d'où $M_2 = \varphi(M_1)$ avec φ une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(z_0)$ avec

$z_0 = \frac{b}{1-a} = \frac{(1-i)(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}{1-i} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\varphi = R_{\left(\Omega;\frac{\pi}{2}\right)}$ avec $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Exercice 6: 1)R: M(Z) → M'(Z') tel que $Z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}(Z - Z_1) + Z_A = e^{-i\frac{\pi}{4}}Z$.

2) $M \in P$; $h_{\left(A;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(M) = M' \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'}$

a- $Z' - Z_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z - Z_A)$; $Z' = \frac{1}{\sqrt{2}}Z$; h: M(Z) → M'(Z') tel que $Z' = \frac{1}{\sqrt{2}}Z$

b- $f = h \circ R : M(Z) \to M'(Z')$ tel que $Z' = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}Z$.

c) $\frac{aff\ (\overrightarrow{MM'})}{aff\ (\overrightarrow{AM'})} = \frac{Z' - Z}{Z' - Z_A} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}Z - Z}{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}Z} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{-\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}}$

$= -\frac{1+i}{1-i} = -\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i \in iIR$

donc $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont orthogonaux et par suite AMM' est un triangle rectangle en M'.

3)a- $M_{n+1} = f(M_n) \Leftrightarrow Z_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}Z_n$

$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}Z_0 \neq 0$

$Z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}Z_1 \neq 0$

....

$Z_n = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}Z_{n-1} \neq 0$

En multipliant membre à membre ces égalités puis en simplifiant on obtient

$Z_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n Z_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n e^{-in\frac{\pi}{4}}i$.

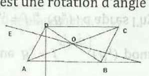
b) $M_n \in [AB]/\{A\} \Leftrightarrow \arg(Z_n) = \frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n e^{-in\frac{\pi}{4}}i\right) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$

$\Leftrightarrow -n\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow -n\frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow n \equiv 1[4]$

en conclusion: $M_n \in (\Delta : y = x) \setminus \{A\}$ équivaut à n = 1+4k avec k dans IN

Exercice 7: 1)a- R rotation d'angle $\frac{-\pi}{2} \neq 0[2\pi]$ alors $f = R \circ t$ est une rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$

b-) $f(E) = R \circ t_{\overrightarrow{EC}}(E) = R(C) = R_{\left(D;\frac{-\pi}{2}\right)}(C) = F$.



c) $\left.\begin{matrix}(BC)\perp(BE)\\(BC)//(AD)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (BE)\perp(AD)$ on a O=B*D =E*G donc

BGDE est un parallélogramme ; donc (GD)// (BE) et comme $(BE)\perp(AD)$ alors $(GD)\perp(AD)$ (1)

$\left.\begin{matrix}BC = DA\\DG = DA\end{matrix}\right\} donc\ BC = DG$

On a: BC=AD donc DG=AD (2); (1) et(2) donne ADG rectangle isocèle en A . $R_{\left(D;\frac{-\pi}{2}\right)}(G) = A$;

O=E*G =A*C donc AGCE est un parallélogramme ($\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AG}$ $f(A) = R \circ t_{\overrightarrow{EC}}(A) = R(G) = A$.

d) f rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$ et f(A) =A, donc $f = R_{\left(A;\frac{-\pi}{2}\right)}$.

f(E)=F donc AEF est un triangle rectangle et isocèle en A.

2)a- ABCD un parallélogramme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. $Z_B - Z_A + Z_D - Z_A = Z_C - Z_A \Leftrightarrow Z_B + Z_D = Z_C$.

b- $R = R_{\left(D;\frac{-\pi}{2}\right)}$; $R : M(Z) \to M'(Z')\ tel que : Z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z - Z_D) + Z_D = -i(Z - Z_D) + Z_D$.

c- $R' = R_{\left(B;\frac{\pi}{2}\right)}$; $R' : M(Z) \to M'(Z')\ tel que : Z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z - Z_B) + Z_B = i(Z - Z_B) + Z_B$.

$R_{\left(B;\frac{\pi}{2}\right)}(C) = E\ donc\ Z_E = i(Z_C - Z_B) + Z_B$; or d'après 2) a) on a: $Z_C = Z_B + Z_D\ donc\ Z_C - Z_B = Z_D$

$Z_E = iZ_D + Z_B$

d- $R_{\left(D;\frac{-\pi}{2}\right)}(C) = F\ donc\ Z_F = -i(Z_C - Z_D) + Z_D$; $Z_F = -iZ_B + Z_D = -i(Z_B + iZ_D) = -iZ_E$

$\frac{Z_F}{Z_E} = -i$; $Z_A = 0$; $\frac{Z_F - Z_A}{Z_E - Z_A} = -i \in iIR\ donc\ (AF)\perp(AE)$ $\left|\frac{Z_F - Z_A}{Z_E - Z_A}\right| = |-i| = 1 \Rightarrow AF = AE$ donc le triangle AEF est isocèle et rectangle en A.

Exercice 8 1) Soit M un point invariant par f_α

$f_\alpha(M) = M \Leftrightarrow Z = e^{i\alpha}Z + 3(1 - e^{i\alpha}) \Leftrightarrow Z(1 - e^{i\alpha}) = 3(1 - e^{i\alpha})$

Si $e^{i\alpha} = 1$; $\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = 1$ $\begin{cases}\cos(\alpha) = 1\\ \sin(\alpha) = 0\end{cases}$ donc $\alpha = 0[2\pi]$

$0 = 3\times 0$ donc tous les points du plan sont invariant par f_α dans ce cas f=id.

Si $e^{i\alpha} \neq 1$ c'est-à-dire $\alpha \neq 0[2\pi]$; $Z = 3\frac{1-e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}} = 3$ et dans ce cas l'ensemble des points invariants est le point A(3).

2) a) pour que f_α soit une translation il suffit que $e^{i\alpha} = 1$ $\alpha \equiv 0[2\pi]$; $Z' = Z$ $donc$ $f_\alpha = id$

b) pour que f_α est une rotation il suffit que $e^{i\alpha} \neq 1$. c'est a dire $\alpha \neq 0[2\pi]$

3) montrons par récurrence que $B_n = f_{\pi(1-\frac{1}{2^n})}(B_0)$ pour tout $n \in IN^*$. Pour n=1 on a:

$B_1 = f_{\frac{\pi}{2}}(B_0) = f_{\frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{2^n})}(B_0)$ (donnée) vraie pour n=1. Supposons que $B_n = f_{\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}(B_0)$ pour tout n de IN* et montrons que $B_{n+1} = f_{\pi\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}(B_0)$ pour tout n de IN*. On a $B_{n+1} = f_{\frac{\pi}{2^{n+1}}}(B_n)$; d'après l'hypothèse de récurrence $B_n = f_{\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}(B_0)$ donc $B_{n+1} = f_{\frac{\pi}{2^{n+1}}}(f_{\pi(1-\frac{1}{2^n})}(B_0))$; or f_α est une rotation d'angle α pour tout $\alpha \neq 0[2\pi]$; $f_{\frac{\pi}{2^{n+1}}}$ est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2^{n+1}}$; $f_{\pi(1-\frac{1}{2^n})}$ est un déplacement d'angle $\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ donc

$f_{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \circ f_{\pi(1-\frac{1}{2^n})}$ est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2^{n+1}} + \pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = \pi\left(\frac{1}{2^{n+1}} + 1 - \frac{1}{2^n}\right) = \pi\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \neq 0[2\pi]$

Donc $f_{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \circ f_{\pi(1-\frac{1}{2^n})} = f_{\pi(1-\frac{1}{2^{n+1}})}$ d'où $B_{n+1} = f_{\pi\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}(B_0)$ pour tout n de IN*.

Conclusion: $B_n = f_{\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}(B_0)$ pour tout n de IN*.

4) $Z_n = e^{i\pi(1-\frac{1}{2^n})}Z_{B_0} + 3(1 - e^{i\pi(1-\frac{1}{2^n})}$

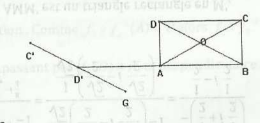
$Z_n = X_n + Y_n = 6\cos\pi(1-\frac{1}{2^n}) + 6i\sin\pi(1-\frac{1}{2^n}) + 3\left[1 - \cos\pi(1-\frac{1}{2^n}) - i\sin\pi(1-\frac{1}{2^n})\right]$

$\begin{cases}X_n = 6\cos\pi(1-\frac{1}{2^n}) + 3 - 3\cos\pi(1-\frac{1}{2^n})\\ Y_n = 6\sin\pi(1-\frac{1}{2^n}) - 3\sin\pi(1-\frac{1}{2^n})\end{cases}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\pi(1-\frac{1}{2^n}) = \pi$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0$;

$\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\pi(1-\frac{1}{2^n}) = \cos\pi = -1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\pi(1-\frac{1}{2^n}) = \sin\pi = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}X_n = -6+3+3 = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}Y_n = 0$



Exercice 9: a- $D' = S_A(B)$ et $(AD)\perp(AB)$;alors (AD) =med[BD'] donc DD' =DB.ABCD est un rectangle de centre O

alors: DB =AC et comme $OA = \frac{1}{2}AC$ et $OB = \frac{1}{2}BD$ alors OA =OB.

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}) \equiv (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc OAB est un triangle équilatéral direct donc BO=BA;

alors 2BO =2BA =BD'. Or on a: DD'=DB et DB =2BO donc DD' =BD' donc $D' \in med[BD]$; de plus $O \in med[BD]$ car O =B*D donc (D'O) =med[BD].

b- $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{OD'}) \equiv (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{DB};\overrightarrow{OD'})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}[2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

2) a) i) r est une rotation d'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OD}) \equiv (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BO})[2\pi] \equiv \pi + (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BO})[2\pi] \equiv \pi - \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

ii)(OD') et (AD) sont sécantes alors f est une rotation d'angle $2(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{OD'}) \equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi]$.

c- $r \circ f(D) = r \circ S_{(OD')} \circ S_{(AD)}(D) = r \circ S_{(OD')}(D) = r(B) = D$ car (D'O) =med[BD] r un déplacement d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et f un déplacement d'angle $\frac{4\pi}{3}$; donc $r \circ f$ est un déplacement d'angle $\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} \equiv 0[2\pi]$.

$r \circ f$ est une translation, de plus $r \circ f(D) = D$; donc $r \circ f = idP$., $r \circ f = idP$ équivaut a $r = f^{-1}$

d- r est une rotation de centre I et r(A) =O, donc IA =IO; $I \in med[OA]$

$r = f^{-1}$ est une rotation de centre I; or f et f^{-1} ont le même centre donc $f = S_{(OD')} \circ S_{(AD)}$ de centre I c'est-à-dire $I \in (OD') \cap (AD)$. **Conclusion:** $I \in (AD) \cap (OD') \cap med[OA]$.

3)a- $f = S_{(OD')} \circ S_{(AD)}$ alors $f^{-1} = S_{(AD)} \circ S_{(OD')}$; $r(D) = f^{-1}(D) = S_{(AD)} \circ S_{(OD')}(D) = S_{(AD)}(B) = D'$.

b- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ d'où $\overrightarrow{r(A)r(B)} = \overrightarrow{r(C)r(D)}$. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{D'C'}$; ODC'D' est un parallélogramme ($t_{\overrightarrow{OD}}(D') = C'$).

4) a) $g(B) = S_{(OD')} \circ r(B) = S_{(OD')}(D) = B$., $S_{(OD')}$ est un antidéplacement et r un déplacement, alors g est un antidéplacement; de plus g fixe le point B donc g est une symétrie orthogonale. $g(I) = S_{(OD')} \circ r(I) = S_{(OD')}(I) = I$., $g = S_{(BI)}$

b- G =g(C); G =$S_{(BI)}$(C).

c- g(C) =G; $S_{(OD')} \circ r(G) = S_{(OD')}(C')$. $\left.\begin{array}{l} S_{(OD')}(C') = G \\ (C'D') \perp (OD') \end{array}\right\}$ alors $D' = G * C'$.

d; $\left.\begin{array}{l} (BO) \perp (D'O)\ car\ (D'O) = med[BD] \\ (GD') \perp (D'O)\ car\ (D'O) = med[GC'] \end{array}\right\}$ donc $(BO) // (GD')$.

Par suite on a: $\left.\begin{array}{l} (BO) // (GD') \\ D'G = OB \end{array}\right\}$ alors BOD'G est un parallélogramme.

De plus (D'O)⊥(BO) d'où BOD'G est un rectangle.

Exercice10: 1) $R\left(B; \frac{\pi}{3}\right)$ est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{3}$

$t_{\overrightarrow{BC}}$ est un déplacement d'angle 0; d'où f est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{3} + 0 = \frac{\pi}{3} \neq 2k\pi$ donc f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$. f(B)=C

or $\begin{cases} AB = AC\ car\ ABC\ équilateral \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ donc $f = R_{\left(A; \frac{\pi}{3}\right)}$ avec A est le centre de f d'après l'unicité du centre.

2) a) $g(B) = S_I \circ R_{\left(B, \frac{\pi}{3}\right)}(B) = S_I(B) = C$

b) S_I déplacement d'angle π et $R(B, \frac{\pi}{3})$ est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc g est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \neq 2k\pi$, S_I déplacement d'angle π, g est une rotation d'angle $\frac{4\pi}{3} \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

c) g(G)=G et g(B)=C donc $(\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ or ABC et un triangle équilatéral donc

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et on a $\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \pi$ donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC})[\pi]$, et on a: A; B et C trois points non alignés donc A; B; G et C appartiennent à un même cercle C. comme A; B et C sont trois points du cercle circonscrit au triangle ABC donc A ; B; G et C appartiennent au cercle circonscrit au triangle ABC. GB=GC donc $G \in med[BC]$ donc $G \in (AD)$

__Conclusion__: $G \in (AD) \cap \zeta$ or (AD) et C se coupent en deux points A et ω. Comme $(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ d'où A n'est pas le centre, par suite $G = \omega$.

3)a) g est un déplacement d'angle $\frac{-2\pi}{3}$, g^{-1} est un déplacement d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et on a f un déplacement d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc $f \circ g^{-1}$ déplacement d'angle $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi \neq 2k\pi$ donc $f \circ g^{-1}$ est une rotation d'angle π alors $f \circ g^{-1}$ est une symétrie centrale, comme $f \circ g^{-1}(C) = f(B) = C$ alors $f \circ g^{-1} = S_C$

b) $f \circ g^{-1}(M_2) = f(M) = M_1$ donc $S_C(M_2) = M_1$ donc (M_1M_2) passe par un point fixe C lorsque M décrit le plan P\{C}.

c) M_1M_2=AD équivaut à $2CM_1$=AD (car M_1*M_2=C) $\Leftrightarrow M_1 \in \zeta\left(C, \frac{1}{2}AD\right)$

$\Leftrightarrow M = f^{-1}(M_1) \in \zeta(f^{-1}(C); \frac{1}{2}AD) = \zeta(B; \frac{1}{2}AD)$ car f(B)=C donc $f^{-1}(C) = B$ M décrit $\zeta(B, \frac{1}{2}AD)$

4) $h(B) = S_{(AD)} \circ R_{\left(B; \frac{\pi}{3}\right)}(B) = S_{(AD)}(B) = C$; $h(C) = S_{(AD)} \circ S_{\left(B; \frac{\pi}{3}\right)}(C) =_{(AD)} (A) = A$

$R_{\left(B; \frac{\pi}{3}\right)}$ déplacement et $S_{(AD)}$ antidéplacement donc h est un antidéplacement.

h soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissante ; supposons que h est une symétrie orthogonale d'axe Δ on a: S_Δ(B)=C donc $\Delta \perp (BC)$; S_Δ(C)=A donc $\Delta \perp (AC)$ donc (BC) est parallèle à (AC), or ceci est impossible car $(AC) \cap (BC) = \{C\}$ par suite h est une symétrie glissante.

c) $h = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u}$ un vecteur directeur non nul de Δ.h(C)=A donc J =A*C ∈ Δ; h(B) =C donc I=B*C d'où Δ=(IJ) $h \circ h = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta \circ S_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = t_{2\vec{u}}$; $h \circ h(B) = C$ donc $t_{2\vec{u}}(B) = C$

$2\vec{u} = \overrightarrow{BC}$ donc $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; $h = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}} \circ S_{(IJ)} = S_{(IJ)} \circ t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$

5) a) $S_{(AC)}(B) = \Omega$; $S_{(AC)}(A) = C$; $S_{(AC)}(C) = A$. On a: ABC un triangle équilatéral direct et comme la symétrie orthogonale conserve les distances et change les mesures des angles orientés en leurs opposés alors $C\Omega A$ est un triangle équilatéral indirect.

Donc $\begin{cases} \Omega A = \Omega C \\ (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ et d'après l'unicité du centre de rotation Ω est le centre de r ; $r = r\left(\Omega; \frac{\pi}{3}\right)$

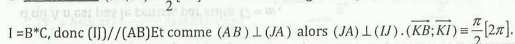
$\begin{array}{l} r(A) = B \\ r(B) = E \end{array}$ donc $\begin{cases} AB = CE \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CE}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CE}) \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CE})[2\pi] \equiv \frac{-\pi}{3} + \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv 0[2\pi]$

Donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires de même sens. Et comme AC=AB=CE alors C=A*E

b) soit r(N) =M ; on a: r(A) =C donc $\begin{cases} (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \\ AN = CM \end{cases}$

$(\overrightarrow{CN'}, \overrightarrow{CM}) \equiv (\overrightarrow{CN'}, \overrightarrow{AN}) + (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM'})[2\pi] \equiv \frac{-\pi}{3} + \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv 0[2\pi]$

Donc $\overrightarrow{CN'}$ *et* $\overrightarrow{CM}$ deux vecteurs colinéaires de même sens et comme CM = AN et AN = CN' donc



CN' = CM alors r(N)=N' et comme $r(\Omega) = \Omega$ on a donc: $\begin{cases} \Omega N = \Omega N' \\ (\overrightarrow{\Omega N}, \overrightarrow{\Omega N'}) \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ donc $\Omega NN'$ est équilatéral.

__2eme méthode:__ $\overrightarrow{AN} = \frac{AN}{AB}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{r(A)r(N)} = \frac{AN}{AB}\overrightarrow{r(A)r(B)}$

$\overrightarrow{CM} = \frac{AN}{AB}\overrightarrow{CE}$ et comme $\overrightarrow{CN'} = \frac{CN'}{CE}\overrightarrow{CE}$ on a: $\overrightarrow{CN'} = \overrightarrow{CM}$ par suite N' =M donc r(N) =N'

Exercice 11: a- $\begin{array}{l} g(A) = f \circ S_{(AD)}(A) = f(A) = C \\ g(D) = f \circ S_{(AD)}(D) = f(D) = B \end{array}$ $S_{(AD)}$ antidéplacement

; f antidéplacements

donc g est un déplacement . Or S_O(A)=C et S_O(D)=B donc g et S_O sont deux

déplacements coïncident sur deux points distincts A et D donc g=S_O.

b- $g = f \circ S_{(AD)}$ or $S_O = f \circ S_{(AD)} \Leftrightarrow S_O \circ S_{(AD)} = f$,

$(IJ) \perp (EF)$ et $(IJ) \cap (EF) = \{O\}$ donc $S_O = S_{(EF)} \circ S_{(IJ)}$ .Or (IJ)//(AD) et I le projeté orthogonal de A sur (IJ) donc $S_{(IJ)} \circ S_{(AD)} = t_{2\overrightarrow{AI}} = t_{\overrightarrow{AB}}$,

$f = S_{(EF)} \circ S_{(IJ)} \circ S_{(AD)} = S_{(EF)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$ or $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (EF)

donc f est une symétrie glissante d'axe (EF) et de vecteur $\overrightarrow{AB}$

Exercice 12: 1) f une isométrie tel que : f(A) =B ; f(J) =K et f(I) =I.

a- on pose f(C) =C', J =A*C donc f(J) =f(A)*f(C) [car l'isométrie conserve les milieux];

K =B*C'; S_K(B) =C', donc C' =A.

b- __1er méthode__: $(\overrightarrow{JA}; \overrightarrow{JI}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ car dans le triangle ABC J =A*C ;

I =B*C, donc (IJ)//(AB)Et comme $(AB) \perp (JA)$ alors $(JA) \perp (IJ)$. $(\overrightarrow{KB}; \overrightarrow{KI}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

f une isométrie qui conserve les mesures des angles orientés; alors f est un déplacement.

f est d'angle $(\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{BK}) \equiv (\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{BA})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BA})[2\pi] \equiv \frac{-\pi}{2} + \pi[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

$\frac{\pi}{2} \neq 0[2\pi]$ donc f est une rotation.. Or IA =IB et $(\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{IB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ car ABC isocèle en A et I =B*C donc f est de centre I.

__2eme méthode__: On a: $r_{\left(I; \frac{\pi}{2}\right)}(A) = B$; $r_{\left(I; \frac{\pi}{2}\right)}(J) = K$; $r_{\left(I; \frac{\pi}{2}\right)}(I) = I$

$r_{\left(I; \frac{\pi}{2}\right)}$ et f deux isométries coïncident sur 3 points non alignés A, J et I donc $f = r_{\left(I; \frac{\pi}{2}\right)}$.

__3eme méthode__: f(I) =I et $f \neq id$ car f(A) =B ≠ A, donc f soit une symétrie orthogonale d'axe Δ passant par I, soit une rotation de centre I.

si f est une symétrie orthogonale d'axe Δ, alors Δ =med[AB] =med[JK], ce ci est impossible car (AB) et (JK) sont sécantes en K, donc f n'est pas une symétrie orthogonale d'où f est une rotation de centre I et d'angle $(\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{IB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2)a- E =S_K(I); h(A) =B; h(C) =A et h(I) =E. $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AI}) \equiv \frac{-\pi}{4}[2\pi]$ car [AC) est bissectrice interne de $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$. $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE}) \equiv -(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BI})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ car le symétrie orthogonale change les mesures des angles orientés en leurs opposés. h une isométrie qui change les mesures des angles orientés en leurs opposée donc h est un antidéplacement. h(I) =E.

b- <u>1er méthode</u>: $t_{\overrightarrow{IB}}$ est un déplacement et $S_{(KJ)}$ un antidéplacement donc $t_{\overrightarrow{IB}} \circ S_{(KJ)}$ un antidéplacement., $t_{\overrightarrow{IB}} \circ S_{(KJ)}(A) = t_{\overrightarrow{IB}}(I) = B$; $t_{\overrightarrow{IB}} \circ S_{(KJ)}(I) = t_{\overrightarrow{IB}}(A) = E$, donc $t_{\overrightarrow{IB}} \circ S_{(KJ)}$ et h sont deux antidéplacements coïncident sur deux points distincts A et I, d'où $h = t_{\overrightarrow{IB}} \circ S_{(KJ)}$.

<u>2eme méthode:</u> h est un antidéplacement; donc h soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissante; Supposons que h soit une symétrie orthogonale: On a h(C) =A alors h(A) =C, or h(A) =B ≠ C, donc h n'est pas une symétrie orthogonale, par suite h est une symétrie glissante. $h = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ (forme réduite de h) $h \circ h = t_{2\vec{u}}$; $h \circ h(C) = B$; $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{IB}$, $\left.\begin{matrix} h(A) = B \text{ donc } A*B = K \in \Delta \\ h(C) = A \text{ donc } C*A = J \in \Delta \end{matrix}\right\} \Delta = (KJ)$; $h = t_{\overrightarrow{IB}} \circ S_{(KJ)}$.

3)h(M) =M_2; f(M) =M_1 alors $h \circ f^{-1}(M_1) = h(M) = M_2$. f^{-1} déplacement et h antidéplacement, alors $h \circ f^{-1}$ est un antidéplacement. $h \circ f^{-1}(B) = h(A) = B$; $h \circ f^{-1}(A) = h(C) = A$; $h \circ f^{-1} = S_{(BA)}$ donc $S_{(BA)}(M_1) = M_2$

<u>Exercice 13:</u> 1) $(OC) \cap (OJ) = \{O\}$ $2(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.Donc $f_1 = R(O;\frac{\pi}{2})$

(OJ)//(OB) et J le projeté orthogonal de B sur (OJ)donc $f_2 = S_{(OJ)} \circ S_{(AB)} = t_{2\overrightarrow{BJ}} = t_{\overrightarrow{BC}}$

2)a) $I = A*B \Rightarrow g(I) = g(A)*g(B)$ signifie $J = B*g(B)$ donc $g(B) = C$

b) $g \circ t_{\overrightarrow{OA}}(J) = g(I) = J$; $g \circ t_{\overrightarrow{OA}}(O) = g(A) = B$

g antidéplacement et $t_{\overrightarrow{OA}}$ déplacement donc $g \circ t_{\overrightarrow{OA}}$ est un antidéplacement

$g \circ t_{\overrightarrow{OA}}$ fixe J donc $g \circ t_{\overrightarrow{OA}}$ est une symétrie orthogonale et comme $g \circ t_{\overrightarrow{OA}}(O) = B$ donc $g \circ t_{\overrightarrow{OA}} = S_{(IJ)}$ car (IJ) =med[OB].

c- $g \circ t_{\overrightarrow{OA}} = S_{(IJ)}$ donc $g = S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{AO}}$; or $\overrightarrow{AO}$ est un vecteur directeur de (IJ) donc g est une symétrie glissante d'axe (IJ)

et de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

3) $AI = \frac{1}{2}AB$ car I=A*B; $BJ = \frac{1}{2}BC$ car J=B*C et AB=BC donc AI= BJ $\neq 0$ il existe un unique déplacement et un unique antidéplacement transforment A en B et I en J

<u>Exercice 14:</u> 1) $S_{(AB)}(O) = O'$ alors OA=O'A et OB=O'B, d'autre part OA=OB car ABC est équilatéral de centre O donc OA=O'A=OB=O'B; par suite AOBO' est un losange.J=A*B donc J est le centre de AOBO'.(AO)//(BO') et $(AO) \perp (BC)$ donc $(BO') \perp (BC)$.

2)a- $\left.\begin{matrix} BO' = BO \\ BO = CO \end{matrix}\right\}$ *alors* $BO' = CO \neq 0$ donc il existe un unique déplacement *f* tel que *f(B)=C et f(O') =O.*

b- *f* est d'angle $(\overrightarrow{BO'};\overrightarrow{CO}) \equiv (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{CO})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{CO})[2\pi]$
$\equiv \frac{-2\pi}{3} + \pi[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\frac{\pi}{3} \neq 0[2\pi]$ donc f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et comme $\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ alors f est de centre A;

$f = R_{(A,\frac{\pi}{3})}$.

3)a- $S_{(AI)} \circ S_{(AB)} = R(A;2(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI})) = R\left(A,\frac{\pi}{3}\right) = f$ $(AI) \cap (AB) = \{A\}$

b- $g = t_{\overrightarrow{CB}} \circ f$ f est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{3}$ et $t_{\overrightarrow{CD}}$ déplacement d'angle 0; donc g est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{3} \neq 0[2\pi]$, par suite g est une rotation. Comme $g(B) = t_{\overrightarrow{CB}} \circ f(B) = B$ alors $g = R(B;\frac{\pi}{3})$

4)a- $\varphi(B) = C$ *et* $\varphi(O') = O$; on a med[BC] ≠ med[OO'], donc φ est un antidéplacement qui n'est pas une symétrie orthogonale d'où c'est une symétrie glissante d'axe Δ.
$\varphi(B) = C$ *et* $\varphi(O) = O'$ alors: B*C =I ∈ Δ et O*O' =J ∈ Δ; alors Δ =(IJ). D'autre part: IB =IK alors $I \in med[BK]$ et JB =JK alors $J \in med[BK]$ donc Δ =med[BK].

b- $\varphi = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$; $\varphi(B) = C$ alors $t_{\vec{u}} \circ S_\Delta(B) = C$; $t_{\vec{u}}(K) = C$ donc $\vec{u} = \overrightarrow{KC}$.

5)a- (BK) est perpendiculaire à (IJ) en Ω;
alors $S_{(BK)} \circ S_{(IJ)} = S_\Omega$.

b- $h = S_\Omega \circ \varphi = S_{(BK)} \circ S_{(IJ)} \circ \varphi = S_{(BK)} \circ S_{(IJ)} \circ S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{KC}}$. $h = S_{(BK)} \circ t_{\overrightarrow{KC}}$ $t_{\overrightarrow{KC}} = S_{(BK)} \circ S_{(JE)}$ avec E =A*K.
$h = S_{(BK)} \circ S_{(BK)} \circ S_{(JE)} = S_{(JE)}$; or (JE) =med[AK] =D; par suite h=S_D.

6) $\varphi(M) = M_2$ *et* $f(M) = M_1$; $\varphi \circ f^{-1}(M_1) = \varphi(M) = M_2$
f^{-1} déplacement et φ antidéplacement donc $\varphi \circ f^{-1}$ est un antidéplacement. $\left.\begin{matrix} \varphi \circ f^{-1}(C) = \varphi(B) = C \\ \varphi \circ f^{-1}(O) = \varphi(O') = O \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varphi \circ f^{-1} = S_{(OC)}$. $S_{(OC)}(M_1) = M_2$

<u>Exercise 15:</u> 1)a- $S_{(AC)}$(B)=D ; $S_{(AC)}$(A)=A ; $S_{(AC)}$(C)=C
AB= AD et BC =DC ; Donc: AD =DC =AC; par suite ADC est équilatéral donc $\begin{cases} AD = DC \\ (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{DC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ alors $r_{(D;\frac{\pi}{3})}(A) = C$; où D est le centre de r.

b- r(B)=B' et r(A) =C donc $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CB'}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$; AB =CB'.

$(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB'}) \equiv (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CB'})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) + \pi + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CB'})[2\pi]$
$\equiv \frac{-\pi}{3} + \pi + \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \pi[2\pi]$

$\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'}$ deux vecteurs colinéaire de sens contraire et comme AB =CB' et AC =AB on a donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB'}$ alors C =A*B'

c)l'antidéplacement conserve les distances et change les mesures des angles orientés en leurs opposées. $K \in [AB]$ alors $r(K) \in r([AB]) = [CB']$.On pose r(K) =K" et r(A) =C; alors $(\overrightarrow{KA};\overrightarrow{K''C}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et KA =K"C. Or on a: KA =K'C et $(\overrightarrow{KA};\overrightarrow{K'C}) \equiv (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CA})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Donc $(\overrightarrow{K'A};\overrightarrow{K''C}) \equiv (\overrightarrow{K'A};\overrightarrow{KA}) + (\overrightarrow{KA};\overrightarrow{K''C}) \equiv -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv 0[2\pi]$. $\overrightarrow{K'C}$ *et* $\overrightarrow{K''C}$ sont colinéaires de même sens; or K'C =KA =K"C d'où $\overrightarrow{K'C} = \overrightarrow{K''C}$; par suite K'=K"

Ou encore r(K) =K' et par suite $\begin{cases} DK = DK' \\ (\overrightarrow{DK};\overrightarrow{DK'}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$; DKK ' est équilatéral.

2)a) on a C=A*B donc CA =CB' et comme CA =AB car ABC est équilatéral, donc AB =CB'
$AB = CB' \neq 0$; donc il existe un seul antidéplacement f qui transforme A en C et B en B'.

b) *f(A) =C et f(B) =B'* on a $med[AC] \neq med[BB']$ car $(AC) \cap (BB') = \{B'\}$; d'où f n'est pas une symétrie orthogonale donc f est une symétrie glissante.

3)On a ABD un triangle isocèle en A de sens direct, donc le triangle *f(A)f(B)f(D)* qui est CB'D' est un triangle isocèle en *f(A) =C* de sens indirect avec *D' =f(D)*.On a CB'B est un triangle isocèle de sens direct donc D' =B c'est-à-dire *f(D) =B*. On a *f* s'écrit d'une manière unique sous la forme $f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ ; $f \circ f = t_{2\vec{u}}$;

$f \circ f(D) = f(B) = B'$; $t_{2\vec{u}}(D) = B' \Leftrightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{DB'} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB'}$ .f(A)=C donc

$f(A) = C \Rightarrow A*C = O \in \Delta, f(B) = B' \Rightarrow B*B' = E \in \Delta \Rightarrow \Delta = (OE)$.;

$f = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}} \circ S_{(OE)} = S_{(OE)} \circ t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}}$. $f \circ f = t_{2\vec{u}}$

d) I =K*K' , ADC,DKK' et DBB' sont 3 triangles équilatéraux et $R_{(D,\frac{\pi}{3})}(A) = O$; $R_{(D,\frac{\pi}{3})}(K) = I$ *et* $R_{(D,\frac{\pi}{3})}(B) = E$ or A,K et B sont alignés donc O,I et E sont alignés.

4)*f(M) =r(M)* équivaut a $f^{-1} \circ r(M) = M$.*r* est un déplacement et f^{-1} est un antidéplacement; alors $f^{-1} \circ r$ est un antidéplacement.

$\begin{cases} f^{-1} \circ r(A) = f^{-1}(C) = A \\ f^{-1} \circ r(B) = f^{-1}(B') = B \end{cases}$ *donc*: $f^{-1} \circ r$ est un antidéplacement fixe deux points A et B d'où $f^{-1} \circ r = S_{(AB)}$. $f^{-1} \circ r(M) = M \Leftrightarrow S_{(AB)}(M) = M \Leftrightarrow M \in (AB)$; donc l'ensemble des points M du plan tel que f(M) =r(M) est la droite (AB).

5)$r_{(D;\frac{\pi}{3})}$ déplacement d'angle $\frac{\pi}{3}$ et $r_{(C;\frac{2\pi}{3})}$ déplacement d'angle $\frac{2\pi}{3}$; alors g est un déplacement d'angle $\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$, $\pi \neq 0[2\pi]$; donc g est une rotation d'angle π ; par suite g est une symétrie centrale.

$g(D) = r_{(C;\frac{2\pi}{3})} \circ r_{(D;\frac{\pi}{3})}(D) = r_{(C;\frac{2\pi}{3})}(D) = B$ donc O =B*D est le centre de g; g =S_O.

6)a) $g(N) = r_{(C;\frac{2\pi}{3})} \circ r_{(D;\frac{\pi}{3})}(N_1) = r_{(C;\frac{2\pi}{3})}(N) = N_2$ donc $S_O(N_1) = N_2 \Leftrightarrow O = N_1 * N_2$

b)N_1N_2 =2ON_1; N_1N_2=AC équivaut a $ON_1 = \frac{1}{2}AC$.

$N_1 \in \zeta_{(O;\frac{1}{2}AC)}$ or $N = r_{(D;\frac{\pi}{3})}(N_1)$; N_1 décrit $\zeta_{(O;\frac{1}{2}AC)}$ donc N décrit $r_{(D;\frac{\pi}{3})}(\zeta)$.

Soit $r_{(D;\frac{\pi}{3})}(O) = O'$; donc N décrit $\zeta'_{(O';\frac{1}{2}AC)}$.

7) $\varphi(B) = S_{(CE)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(CE)} \circ S_{(CB')}(B') = S_{(CE)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(CE)}(B' = S_{(CE)} \circ S_{(AB)}(B)$ car CBB' est isocèle en C; (CE) =med[BB'] donc $S_{(CE)}$(B')=B.
φ est le composé de nombre pair (4) des symétries orthogonales donc φ est un déplacement.
On a $(CE) \cap (CB') = \{C\}$ $2(\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CE}) \equiv (\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CB})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})[2\pi] \equiv \pi + \frac{\pi}{3}[2\pi]\frac{-2\pi}{3}[2\pi]$;
donc $S_{(CE)} \circ S_{(CB')} = r_{(C;\frac{-2\pi}{3})}$., Dans le triangle ABB' on a: C =A*B et E =B*B' donc (CE)//(AB).

$S_{(CE)} \circ S_{(AB)}$ est une translation, $S_{(CE)} \circ S_{(CB')}$ est un déplacement d'angle $\frac{-2\pi}{3}$
$S_{(CE)} \circ S_{(AB)}$ est un déplacement d'angle 0; donc $\varphi = S_{(CE)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(CE)} \circ S_{(CB')}$ est un déplacement d'angle $\frac{-2\pi}{3} \neq 2k\pi$ avec $k \in Z$. Et comme $\varphi(B') = B'$ donc $\varphi = r_{(B';\frac{-2\pi}{3})}$.

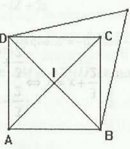
<u>Exercice 16:</u> 1) a- $\psi = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AC)}$; $\psi(A) = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AC)}(A) = t_{\overrightarrow{BC}}(A) = D$
$\psi(D) = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AC)}(D) = t_{\overrightarrow{BC}}(B) = C$. D'où $\psi(A) = D$ *et* $\psi(D) = C$.

b- $t_{\overrightarrow{BC}}$ est un déplacement ; $S_{(AC)}$ est un antidéplacement donc $t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AC)}$ est un antidéplacement, donc ψ soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissante. $\begin{matrix} \psi(A) = D \Rightarrow \Delta_1 \perp (AD) \\ \psi(D) = C \Rightarrow \Delta_1 \perp (DC) \end{matrix}$ donc (AD)//(DC); or $(AD) \cap (DC) = \{D\}$

Par suite ψ n'est pas une symétrie orthogonale donc ψ est une symétrie glissante $\psi = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$

$\psi \circ \psi = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta \circ S_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{2\vec{u}}$, $\psi \circ \psi(A) = \psi(D) = C \Rightarrow t_{2\vec{u}}(A) = C$,

$2\vec{u} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



$\psi(A) = D \Rightarrow A*D = J \in \Delta$; $\psi(D) = C \Rightarrow D*C = K \Rightarrow \Delta = (JK) \Rightarrow \psi = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}} \circ S_{(JK)} = S_{(JK)} \circ t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

2) a- on a: AB =AD et $AB \neq 0$ car ABCD est un carré donc il existe un unique déplacement R tel que: R(B) =A et R(A) =D.

b- on a: $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DA}) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$. R est un déplacement d'angle $\frac{-\pi}{2} \neq 2k\pi$, donc R est une rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$. Soit W le centre de R: $\left.\begin{matrix} R(W)=W \\ R(B)=A \end{matrix}\right\} \Rightarrow W \in med[AB]$; $\left.\begin{matrix} R(W)=W \\ R(A)=D \end{matrix}\right\} \Rightarrow W \in med[AD]$; par suite

$W \in med[AB] \cap med[AD] = \{I\}$ donc W=I ; $R = R_{\left(I;\frac{-\pi}{2}\right)}$.

3) $g = R_{(B;\frac{\pi}{6})} \circ R_{(E;\frac{\pi}{3})}$, $R_{(B;\frac{\pi}{6})}$ est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{6}$; $R_{(E;\frac{\pi}{3})}$ est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc g est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \neq 2k\pi$, $g(D) = R_{(B;\frac{\pi}{6})} \circ R_{(E;\frac{\pi}{3})}(D) = R_{(B;\frac{\pi}{6})}(B) = B$ d'où g(D)=B;

soit W le centre de g. g(W)=W et g(D)=B donc WD =WB

$(\overrightarrow{WD};\overrightarrow{WB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$; avec $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$; donc $g = R_{(C;\frac{\pi}{2})}$.

4) $f = R_{(I;\frac{\pi}{2})}$; $f^{-1} = R_{(I;\frac{-\pi}{2})}$; $T = g \circ f^{-1}$. On a: $T(A) = g \circ f^{-1}(A) = g(D) = B$; donc T(A)=B car f(D)=A d'où $f^{-1}(A) = D$. ; f est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2}$. f^{-1} est un déplacement d'angle $\frac{-\pi}{2}$

g est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2}$; alors T est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$ =0; par suite T est une translation de vecteur $\vec{U}$ .. $T = t_{\vec{U}} \Rightarrow t_{\vec{U}}(A) = B \Rightarrow \vec{U} = \overrightarrow{AB}$ par suite $T = t_{\overrightarrow{AB}}$.

5) f(M)=M_1 ; g(M)=M_2.

a- $T = t_{\overrightarrow{AB}}$; $T = g \circ f^{-1}$. ; $T(M_1) = g \circ f^{-1}(M_1) = M_2$. $t_{\overrightarrow{AB}}(M_1) = M_2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_1M_2}$, donc ABM_2M_1 est un parallélogramme.

b- $\varphi(A) = M_1$; $\varphi(D) = M_2$; $AD = M_1M_2$; or AD =AB car ABCD est un carré,
AB=M_2M_1 car ABM_2M_1 est un parallélogramme. Par suite AD=M_2M_1 et AD$\neq 0$ donc $A \neq D$.
D'où il existe un unique antidéplacement tel que $\varphi(A) = M_1$ et $\varphi(D) = M_2$.

c- $\varphi(A) = M_1$ et $\varphi(D) = M_2$; $t_{\overrightarrow{AM_1}} \circ S_{(AI)}(A) = t_{\overrightarrow{AM_1}}(A) = M_1$; $t_{\overrightarrow{AM_1}} \circ S_{(AI)}(D) = t_{\overrightarrow{AM_1}}(B) = M_2$ .. φ est un antidéplacement ; $t_{\overrightarrow{AM_1}}$ est un déplacement , $S_{(AI)}$ est un antidéplacement; donc $t_{\overrightarrow{AM_1}} \circ S_{(AI)}$ est un antidéplacement ; φ et $t_{\overrightarrow{AM_1}} \circ S_{(AI)}$ sont deux antidéplacements coïncident sur deux points distincts donc $\varphi = t_{\overrightarrow{AM_1}} \circ S_{(AI)}$.

On a: $M_1 = f(M)$; $M \in (BD) \Rightarrow M_1 \in f(BD)$; or $f(BD) = R_{(I;\frac{\pi}{2})}(BD)$ =(AC) donc

*si $M_1 \in (AC) \Rightarrow M_1 \in (AI)$.

*Si A =M_1 c'est-à-dire M =D car $R_{(I;\frac{\pi}{2})}(D) = A$; $\overrightarrow{AM_1} = \vec{0}$; $\varphi = S_{(AI)}$

*Si $A \neq M_1 \Rightarrow \overrightarrow{AM_1} \neq \vec{0}$. $M \neq D$; alors la forme réduite de φ est: $\varphi = t_{\overrightarrow{AM_1}} \circ S_{(AI)} = S_{(AI)} \circ t_{\overrightarrow{AM_1}}$ car $\overrightarrow{AM_1}$ est un vecteur directeur de (AI).
si M appartient a la parallèle a (AC) alors f(M) =M_1 appartient a la droite qui passe par f(D)=A et parallèle f(AC) =(BD)
Si M_1=A alors $\varphi = t_{\overrightarrow{AA}} \circ S_{(AI)} = S_{(AI)}$

Si $M_1 \neq A \Rightarrow M \neq D$; on a: $\varphi = t_{\overrightarrow{AM_1}} \circ S_{(AI)} = S_{\Delta_1} \circ S_{(AI)} \circ S_{(AI)} = S_{\Delta_1} \circ idP \Rightarrow \varphi = S_{\Delta_1}$; avec Δ_1=méd[AM_1].

Exercice 17: 1)on a $S_{(O;\vec{u})} : M(Z) \rightarrow M'(Z')$ tel que $Z' = \overline{Z}$; on cherche la rotation R tel que:

$R : M(Z) \rightarrow M'(Z')$; $Z' = -iZ + 1 = e^{-i\frac{\pi}{2}}Z + 1$; R d'angle $\frac{-\pi}{2}$ et de centre $\Omega(\frac{1}{1+i})$

$R \circ S_{(O;\vec{u})}$; $M(Z) \rightarrow M'(Z')$ tel que $Z' = -i\overline{Z} + 1$. $f = R \circ S_{(O;\vec{u})}$ donc f est un antidéplacement.

Soit O' =f(O); $Z_{O'} = -i\overline{0} + 1 = 1$; O'(1) Soit A(i) ; f(A)=A'; $Z_{A'} = -i\overline{Z_A} + 1 = -i(\overline{i}) + 1 = 0$; $A' = O$; f(O) =O' ;

f(A)=O , $\frac{Z_A}{Z_{O'}} = i$ donc OAO' est un triangle rectangle et isocèle en O.

On a $med[OO'] \neq med[AO]$ car $(OO') \cap (OA) = \{O\}$ d'où f n'est pas une symétrie orthogonale ,donc f est une symétrie glissante.

2) f s'écrit d'une manière unique sous la forme $f = t_{\vec{W}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{W}}$ avec $\vec{W}$ un vecteur directeur de Δ.

$f \circ f = t_{\vec{W}} \circ S_\Delta \circ S_\Delta \circ t_{\vec{W}} = t_{\vec{W}} \circ t_{\vec{W}} = t_{2\vec{W}}$; $f \circ f$ est une translation; $f \circ f(A) = f(O) = O'$ donc $t_{2\vec{W}}(A) = O'$

équivaut à $2\overrightarrow{W} = \overrightarrow{AO'}$ équivaut à $aff(\overrightarrow{W}) = \frac{1}{2}aff(\overrightarrow{AO'}) = \frac{1}{2}(1-i)$

2ème méthode: $f \circ f : M(Z) \rightarrow M'(Z')$ tel que $Z' = -i\overline{(-i\overline{Z} + 1)} + 1 = -i(iZ + 1) + 1 = Z - i + 1$

$f \circ f$ est une translation de vecteur $\vec{\lambda}$ d'affixe i+1; or $f \circ f = t_{2\vec{W}}$ donc $\vec{W}\left(\frac{-i+1}{2}\right)$.

3) f est de vecteur $\vec{W}\left(\frac{1-i}{2}\right)$ et d'axe Δ, f(O) =O' donc K =O*O' un point de Δ avec $Z_K = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.

f(A) =O donc E =A*O un point de Δ avec $Z_E = \frac{i}{2}$ donc Δ =(EK).

Exercice 18: 1) soient M(x_M; y_M) et N(x_N; y_N) deux points de P d'images respectives par f: M'(x'_M; y'_M) et N'(x'_N; y'_N)

$M'N' = \sqrt{(x'_N - x'_M)^2 + (y'_N - y'_M)^2} = \sqrt{(y_N - y_M)^2 + (x_N + 3 - x_M - 3)^2} = \sqrt{(y_N - y_M)^2 + (x_N - x_M)^2} = MN$ D'où f conserve les distances ; par suite f est une isométrie.

2)soit M(x, y) un point de P; M est invariant si et seulement si f(M) =M

$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 0 = 3 \end{cases}$ ce qui est impossible, donc f n'admet pas de point invariants.

3) f est une isométrie qui n'admet pas de points invariants donc f soit une translation soit une symétrie glissante et d'après les expressions analytiques de f ; f n'est pas translation (car si $f = t_{\vec{W}}$ avec $aff\overrightarrow{W} = \alpha + i\beta$; $Z' = Z + \alpha + i\beta$ avec α et β deux réels $\begin{cases} x' = x+\alpha \\ y' = y+\beta \end{cases}$.

4)Il existe un seul vecteur $\vec{u}$ non nul et une droite Δ de vecteur directeur $\vec{u}$ tel que: $f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$,

on a alors $f \circ f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta \circ S_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = t_{2\vec{u}}$

Si f(O) =O' et f(O') =O" alors $f \circ f(o) = O''$; $t_{2\vec{u}}(O) = O''$; $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OO''}$, O'(0; 3) et O"(3; 3) d'où $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$.,

f(O) =O' donc K=O*O' un point de Δ ; par suite Δ est la droite qui passe par le pont K et $\vec{u}$ sont vecteur directeur.

Remarque: on peut déterminer analytiquement S_Δ on utilisant $f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$ donc $t_{-\vec{u}} \circ f = S_\Delta$.

Soit M(x, y) un point de P on pose $M_1(x_1, y_1)$=f(M) et M'(x', y') $= t_{-\vec{u}}(M_1)$, donc $M' = S_\Delta(M_1)$

$M' = t_{-\vec{u}}(M_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x_1 - \frac{3}{2} \\ y' = y_1 - \frac{3}{2} \end{cases}$ or $\begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = x+3 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x' = y - \frac{3}{2} \\ y' = x + 3 - \frac{3}{2} = x + \frac{3}{2} \end{cases}$ La droite est l'ensemble des points invariants par S_Δ. Pour tout points M(x, y) on a: $M = S_\Delta(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - \frac{3}{2} \\ y = x + \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = x + \frac{3}{2}$

En fin l'axe Δ de f à pour équation $y = x + \frac{3}{2}$.

Exercice 19: 1)Soit $\overrightarrow{W}(2i)$ $t_{\vec{W}} : M(Z) \rightarrow M'(Z')$ tel que Z'=Z+2i.

$S_{(O,\vec{u})} : M(Z) \rightarrow M'(Z')$ tel que $Z' = \overline{Z}$; $t_{\vec{W}} \circ S_{(O,\vec{u})} : M(Z) \rightarrow M'(Z')$ tel que $Z' = \overline{Z} + 2i$.

$f = t_{\vec{W}} \circ S_{(O,\vec{u})}$; soit Δ=med[OA] avec A(0;2), $f = S_\Delta \circ S_{(O,\vec{u})} \circ S_{(O,\vec{u})} = S_\Delta$.

2)Δ_1: y=-2x, Δ_2: y= 2x+1; soit f(Δ_1)=Δ'_1.

M(x, y)∈ Δ_1 f(M)= M' ; M'(x', y'); Z=x+iy; Z'=x'+iy'; $Z' = \overline{Z} + 2$

$X' + iy' = \overline{x + iy} + 2i = x + i(2-y)$

$\begin{cases} x = x' \\ y' = 2 - y = 2 - (-2x) = 2 + 2x = 2 + 2x' \end{cases}$

Δ'_1: y'= 2x'+2; $f(\Delta_1) = \Delta_2(*)$; *M(x, y)∈ Δ_2; f(M)=M';* $x' + iy' = \overline{x + iy} + 2 = x + i(2-y)$

$\begin{cases} x = x' \\ y' = 2 - y = 2 - (2x+2) = -2x = -2x' \end{cases}$ *f(Δ_2)=Δ_1(**)*

D'après (*) et (**) $f(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \Delta_1 \cup \Delta_2$ donc $\Delta_1 \cup \Delta_2$ sont globalement invariant par f

Exercice 20: 1)a- $AI = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AD = DJ$ car I=A*B et J =A*D , AI =DJ $\neq 0$ donc il existe un seul déplacement f tel que f(A) =D et f(I) =J, b) $R_{(O;\frac{-\pi}{2})}(A) = D$; $R_{(O;\frac{-\pi}{2})}(I) = J$

f et $R_{\left(O;\frac{-\pi}{2}\right)}$ deux déplacements qui coïncident sur deux points distincts I et A donc $f = R_{\left(O;\frac{-\pi}{2}\right)}$.

2) g est un antidéplacement g(A) =D et g(I) =J
g soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissante.
Supposons que g est une symétrie orthogonale :
$\left.\begin{matrix} g(A) = D \\ g(I) = J \end{matrix}\right\}$ alors (AI)//(DJ); ce ci est impossible car $(AI) \cap (DJ) = \{D\}$; ce qui prouve que g n'est pas une symétrie orthogonale par suite g est symétrie glissante s'écrit d'une manière unique sous la forme: $g = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$, $\left.\begin{matrix} g(A) = D \text{ donc } A*D = J \in \Delta \\ g(I) = J \text{ donc } I*J \in \Delta \end{matrix}\right\}$ donc Δ = (IJ).

$g = t_{\vec{u}} \circ S_{(IJ)}$; $g(I) = t_{\vec{u}} \circ S_{(IJ)}(I) = t_{\vec{u}}(I) = J$ donc $\vec{u} = \overrightarrow{IJ}$ par suite $g = t_{\overrightarrow{IJ}} \circ S_{(IJ)}$.

b) f est un déplacement et $S_{(AI)}$ est un antidéplacement; alors $f \circ S_{(AI)}$ est un antidéplacement.
$f \circ S_{(AI)}(A) = f(A) = D$; $f \circ S_{(AI)}(I) = f(I) = J$

g et $f \circ S_{(AI)}$ sont deux antidéplacements qui coïncident sur deux points distincts, alors $g = f \circ S_{(AI)}$.

c) $t = S_{(IJ)} \circ f \circ S_{(AI)} = S_{(IJ)} \circ g = S_{(IJ)} \circ S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{IJ}} = t_{\overrightarrow{IJ}}$ (translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$).

3)a) f est un déplacement et g^{-1} est un antidéplacement; alors $g^{-1} \circ f$ est un antidéplacement.
$\left.\begin{matrix} g^{-1} \circ f(A) = g^{-1}(A) = A \\ g^{-1} \circ f(I) = g^{-1}(J) = I \end{matrix}\right\}$ *donc* $g^{-1} \circ f$ est un antidéplacement fixe A et I donc $g^{-1} \circ f = S_{(AI)}$.

b) $\delta = \{M \in P; f(M) = g(M)\}$
$M \in \delta \Leftrightarrow f(M) = g(M) \Leftrightarrow g^{-1} \circ f(M) = g^{-1} \circ g(M) \Leftrightarrow g^{-1} \circ f(M) = M \Leftrightarrow S_{(AI)}(M) = M \Leftrightarrow M \in (AI)$

$\delta=(AI)$ $B\in(AI)$ donc $g(B)=f(B)=R_{(O;\frac{-\pi}{2})}(B)=A$

4)a) $f=R_{(O;\frac{-\pi}{2})}$; $Z_O=1+i$ $f(M)=M'\Leftrightarrow Z'-Z_0=e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z-Z_0)\Leftrightarrow Z'=-iZ+2i$

b) $g=f\circ S_{(AI)}$; $S_{(AI)}:P\to P;\ M(Z)\to M'(Z')$; tel que: $Z'=\overline{Z}$ donc $g:\ \underset{M(Z)\to M'(Z')}{P\to P}$ tel que: $Z'=-i\overline{Z}+2i=-i(-\overline{Z}+2)$.

5)a)Pour n=0; $\overrightarrow{AM_0}=\overrightarrow{AA'}=\vec{0}=2\overrightarrow{IJ}$; vraie pour n=0.Supposons que $\overrightarrow{AM_{2n}}=2n\overrightarrow{IJ}$ et montrons que $\overrightarrow{AM_{2(n+1)}}=2(n+1)\overrightarrow{IJ}$. On a $\overrightarrow{AM_{2n+2}}=\overrightarrow{AM_{2n}}+\overrightarrow{M_{2n}M_{2n+2}}$, or $g=S_{(IJ)}\circ t_{\overrightarrow{IJ}}$.

$g\circ g=t_{2\overrightarrow{IJ}}$; $g\circ g(M_{2n})=g(M_{2n+1})=M_{2n+2}$; $\overrightarrow{AM_{2n+2}}=2n\overrightarrow{IJ}+2\overrightarrow{IJ}=(2n+2)\overrightarrow{IJ}$.

Donc d'après le principe de récurrence, $2n\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AM_{2n}}$.

b) $2n\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AM_{2n}}$ donc M_{2n} est un point de la droite qui passe par A et parallèle à (IJ).

Donc $M_{2n+1}=g(M_{2n})$ est un point de la droite qui passe par $g(A)=D$ et parallèle à $g(IJ)=(IJ)$.

Exercice 21: (E): $Z^3-2Z^2-iZ+3-i=0$

1) a) Z=-1 ; $(-1)^3-2(-1)^2-i(-1)+3-i=-1-2+i+3-i=0$ donc -1 est une solution réelle.

b) $(Z+1)(Z^2+az+b)=0\Leftrightarrow Z^3+Z^2+aZ^2+bZ+aZ+b=0\Leftrightarrow Z^3+(1+a)Z^2+(b+a)Z+b=0$

$\begin{cases}1+a=-2\\ b+a=-i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=-i+3\end{cases}$.Donc: (E): $(Z+1)(Z^2-3z+3-i)=0$

$\Delta=9-4(3-i)=9-12+4i=-3+4i$;

$\delta^2=-3+2(2i)=-4+1+2(2i)=1+2(2i)-4=1+2(2i)+(2i)^2=(1+2i)^2\Rightarrow\delta=1+2i$

$\Rightarrow Z_1=\frac{3+1+2i}{2}=2+i;\quad Z_2=\frac{3-1-2i}{2}=1-i$

2) $A(-1)$; $Z_B=1-i$; $Z_C=2+i$. $R_{(A;\frac{\pi}{2})}(B)=B'$. $Z_{B'}-Z_A=e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_B-Z_A)=i(1-i+1)$

$\Rightarrow Z_{B'}=i((1-i+1)+Z_A=i+1+i-1=2i$ Donc $Z_{B'}=2i$.

b) $\begin{cases}AB=AB'\\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB'})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ Pour montrer que ABCB' est un carré il suffit de montrer que ABCB' est un parallélogramme. Montrons que: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B'C}$. $Z_B-Z_A=Z_C-Z_{B'}\Leftrightarrow 1-i+1=2+i-2i\Leftrightarrow 2-i=2-i$

Donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B'C}$; par suite ABCB' un parallélogramme

Or $R_{(A;\frac{\pi}{2})}(B)=B'\Rightarrow(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB'})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\Rightarrow(AB)\perp(AB')$ et AB =AB' Alors ABCB' est un carré.

3) f(A) =C; f(B) =B'

a) S_I est un déplacement; $S_{(AB)}$ est un antidéplacement. Donc $S_I\circ S_{(AB)}$ est un antidéplacement

$S_I\circ S_{(AB)}(A)=S_I(A)=C$, $S_I\circ S_{(AB)}(B)=S_I(B)=B'$

f et $S_I\circ S_{(AB)}$ sont deux antidéplacements coïncident sur deux points distincts A et B alors $f=S_I\circ S_{(AB}$

b) $f=S_I\circ S_{(AB)}=R_{(I;\pi)}\circ S_{(AB)}$

$f=R_{(I;\pi)}=S_{(IF)}\circ S_{(IE)}\circ S_{(AB)}$ avec E =B*C; F =A*B car $(IE)\cap(IF)=\{I\}$ $2(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{IF})\equiv\pi[2\pi]$

On a: (IE)//(AB) alors $S_{(IE)}\circ S_{(AB)}=t_{\overrightarrow{BC}}$ $f=S_{(IF)}\circ t_{\overrightarrow{BC}}$; on a: $\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$ et $\overrightarrow{BC}$ vecteur directeur de (IF) car (BC)//(IF).. $S_{(IF)}\circ t_{\overrightarrow{BC}}$ forme réduite une symétrie glissante. $f=S_{(IF)}\circ t_{\overrightarrow{BC}}=t_{\overrightarrow{BC}}\circ S_{(IF)}$.

4) $g:\ \underset{M(Z)\to M'(Z')}{P\to P}$ tel que: $Z'=i\overline{Z}+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i$. Soient: $M_1(Z_1)$; $M_2(Z_2)$, $g(M_1)=M'_1(Z'_1)$ $g(M_2)=M'_2(Z'_2)$. Montrer que: $M_1M_2=M'_1M'_2$

$M'_1M'_2=|Z'_2-Z'_1|=\left|(i\overline{Z_2}+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i)-(i\overline{Z_1}+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i)\right|=\left|i\overline{Z_2}-i\overline{Z_1}\right|=|i|\left|\overline{Z_2-Z_1}\right|=\left|\overline{Z_2-Z_1}\right|=|Z_2-Z_1|=M_1M_2$

D'où $M_1M_2=M'_1M'_2$, par suite g conserve les distances donc c'est une isométrie.

b- g(E) =E' ; $Z_{E'}=i\overline{Z_E}+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i=i\frac{5}{2}+\frac{5}{2}-i\frac{5}{2}=\frac{5}{2}=Z_E\Rightarrow E=E'$. ; g(F) =F'

$Z_{F'}=i\overline{Z_F}+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i=i(2+\frac{1}{2}i)+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i=2i-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i=\frac{-1}{2}i+2=Z_F\Rightarrow F=F'\Rightarrow g(E)=E$ et $g(F)=F$

c) g est une isométrie qui fixe deux points distincts E et F; donc g soit une symétrie orthogonale d'axe (EF), soit f identité or $g\neq idP$ car $Z'\neq Z$

Exercice 22: 1)S_A est un déplacement d'angle π, $t_{\overrightarrow{AC}}$ est un déplacement d'angle 0 $R_{(B;\frac{\pi}{2})}$ un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donc *f* est un déplacement d'angle $\frac{3\pi}{2}\neq 2k\pi$ d'où *f* est une rotation. Comme on a f(A) =A donc $f=R_{(A;\frac{3\pi}{2})}$.

2) AB =BC $\neq 0$ car ABCD est un carré, donc il existe un unique déplacement g du plan tel que g(A) =B et g(B) =C ; g est un déplacement d'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et de centre O $=med[AB]\cap med[BC]$; $g=R_{(O;\frac{\pi}{2})}$.

3) Soit M un point du plan tel que f(M) =g(M) équivaut a $g^{-1}\circ f(M)=M$

g est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2}$, g^{-1} est un déplacement d'angle $-\frac{\pi}{2}$, *f* est un déplacement d'angle $\frac{3\pi}{2}$ $g^{-1}\circ f$ est un déplacement d'angle $-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}=\pi$, donc $g^{-1}\circ f$ est une rotation d'angle π,

$g^{-1}\circ f$ est une symétrie centrale . Comme $g^{-1}\circ f(A)=g^{-1}(A)=R_{(O;\frac{-\pi}{2})}(A)=D$. Donc $g^{-1}\circ f=S_I$ car I =A*D, $S_I(M)$ =M donc I =M par suite *f* et g coïncident en un seul point I.

4) h est un antidéplacement donc h soit une symétrie glissante; soit une symétrie orthogonale donc h est une symétrie glissante ; h s'écrit d'une manière unique sous la forme $h=t_{\vec{u}}\circ S_\Delta=S_\Delta\circ t_{\vec{u}}$; avec $\vec{u}$ un vecteur directeur non nul de Δ. ; $h\circ h=t_{2\vec{u}}$; $h\circ h(A)=C$ donc $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

h(A) =B donc K =A*B $\in\Delta$, h(B) =C donc L =B*C$\in\Delta$, par suite Δ =(KL) ; $h=t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}\circ S_{(KL)}$.

5) a) $S_A=R_{(A;\pi)}$; $S_A:M(Z)\to M'(Z')$ tel que $Z'=e^{i\pi}(Z-Z_A)+Z_A=-(Z-(-1))-1=-Z-2$

$t_{\overrightarrow{AC}}:M(Z)\to M'(Z')$ tel que $Z'=Z+(Z_C-Z_A)=Z+1-(-1)=Z+2$

Donc $t_{\overrightarrow{AC}}\circ S_A:M(Z)\to M'(Z')$ tel que $Z'=(-Z-2)+2=-Z$

$R_{(B;\frac{\pi}{2})}:M(Z)\to M'(Z')$ tel que $Z'=e^{i\frac{\pi}{2}}(Z-Z_B)+Z_B=i(Z-(-i))-i=iZ-1-i$

$f=R_{(B;\frac{\pi}{2})}\circ t_{(AC)}\circ S_A:M(Z)\to M'(Z')$ tel que $Z'=i(-Z)-1-i=-iZ-1-i$ Donc f est une rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$ et de centre $\Omega\left(\frac{-1-i}{1+i}\right)$; $\Omega(-1)$.Donc $\Omega=A$; par suite $f=R_{(A;\frac{-\pi}{2})}$.

b) Soit M_1 et M_2 deux points du plan tels que: $\varphi(M_1)=M'_1$ et $\varphi(M_2)=M'_2$

$M'_1M'_2=|Z'_2-Z'_1|=|(iZ_2+i+1)-(iZ_1+i+1)|=|i(Z_2-Z_1)|=|Z_2-Z_1|=M_1M_2$, φ conserve les distances, donc c'est une isométrie. Soit M un point invariant par φ ; alors φ (M) =M

M(Z); *Z=x+iy* avec (x,y)$\in$ IR²

$x+iy=i(\overline{x+iy})+i+1=i(x-iy)+i+1$ équivaut a *x+iy=y+1+i(x+1)* $\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+1\\ y=x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+1\\ y=y+1+1=y+2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+1\\ 0=2\end{cases}$ ce qui est impossible; par suite φ est une isométrie qui n'admet pas des points invariants; donc φ soit une translation, soit une symétrie glissante? On a: $Z'\neq Z+b$ donc φ n'est pas une translation d'où φ est une symétrie glissante. , $\varphi=t_{\vec{u}}\circ S_\Delta=S_\Delta\circ t_{\vec{u}}$, φ (O) =O' ; $Z_{O'}=i\overline{0}+i+1=i+1$, φ (O') =O'' ; $Z_{O''}=i\overline{(i+1)}+i+1=i(-i+1)+i+1=2+2i$ $\varphi\circ\varphi(O)=O''$; $\varphi\circ\varphi=t_{2\vec{u}}$ donc

$2\vec{u}=\overrightarrow{OO''}\Leftrightarrow\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OO''}$

$\varphi(O)=O'$ donc E =O*O' $\in\Delta$; $Z_E=\frac{i+1}{2}$, $\varphi(O')=O''$ donc F =O'*O'' $\in\Delta$; $Z_F=\frac{3+3i}{2}$ $\varphi=t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}}\circ S_{(EF)}$

c- $g\circ h(A)=g(B)=C$; $g\circ h(B)=D$; $Z_A=-1$ et $Z_B=-i$ $\varphi(A)=A'$; $Z_{A'}=i\overline{Z_A}+i+1=-i+i+1=1=Z_C$, $\varphi(A)=C$ $\varphi(B)=B'$ alors $Z_{B'}=i\overline{Z_B}+i+1=i(+i)+i+1=i=Z_D$; $\varphi(B)=D$

g déplaement
h antidéplacement } donc $g\circ h$ est un antidéplacement

$g\circ h$ et φ sont deux antidéplacement qui coïncident sur deux points distincts A et B donc $\varphi=g\circ h$.

d- $\varphi=g\circ h=R_{(O;\frac{\pi}{2})}\circ t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}\circ S_{(KL)}$, $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}=S_{(OB)}\circ S_{(IK)}$, $R_{(O,\frac{\pi}{2})}=S_{(OL)}\circ S_{(OB)}$

$\varphi=S_{(OL)}\circ S_{(OB)}\circ S_{(OB)}\circ S_{(IK)}\circ S_{(KL)}=S_{(OL)}\circ S_{(IK)}\circ S_{(KL)}$

6) soit ψ une isométrie qui transforme la paire $\{A;B\}$ en la paire $\{B,C\}$, donc ψ (A) =B et ψ (B) =C ou ψ (A) =C et ψ (B) =B. D'après ce qui précède il existe un seul déplacement g et un seul antidéplacement h transforment A en B et B en C. Cherchons les isométries ψ tel que ψ (A) =C et ψ (B) =B; il existe un unique déplacement ψ tel que ψ (B) =B et ψ (A) =C ; ψ est une rotation de centre B et d'angle $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ où ψ est une symétrie orthogonale d'axe (DB) = med[AC].

Conclusion: Il existe quatre isométries transforment la paire $\{A;B\}$ en la paire $\{B,C\}$ sont:

g ; h ; $R_{(B;\frac{-\pi}{2})}$ et $S_{(BD)}$.

Exercice N° 23 : $\Delta:2x-y+1=0$

$f=t_{\vec{v}}\circ S_\Delta$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ. Soit A le milieu de [MM'], On pose M(x,y) , M'(x'y') et M"(x",y").

$S_\Delta(M)=M'\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}\text{ et }\overrightarrow{MM'}\text{ sont colinéaires}\\ A\in\Delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'-x=2\beta\\ y'-y=-\beta\\ 2\left(\frac{x'+x}{2}\right)-\left(\frac{y'+y}{2}\right)+1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x'=x+2\beta\\ y'=y-\beta\\ 5\beta+4x-2y+2=0\Leftrightarrow\beta=-\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}y-\frac{2}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=x-\frac{8}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{4}{5}\\ y'=y+\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}y-\frac{4}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{4}{5}\\ y'=-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y+\frac{2}{5}\end{cases}$

$t_{\vec{v}}(M')=M''\Leftrightarrow\overrightarrow{M'M''}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}x''-x'=1\\ y''-y'=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x''=x'+1\\ y''=y'+2\end{cases}$

Donc On a $f(M)=M''\Leftrightarrow\begin{cases}x''=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+\frac{1}{5}\\ y''=-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y+\frac{12}{5}\end{cases}$ est l'expression analytique de f.

Exercice N° 24 : 1) A , B et C sont alignés donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow\frac{aff(\overrightarrow{AB})}{aff(\overrightarrow{AC})}\in IR\Leftrightarrow\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\in IR\Leftrightarrow\frac{b-a}{-b-a}\in IR$

2) a) Soit r la rotation de centre A et qui transforme C en E alors $r=R\left(A,\frac{\pi}{2}\right)$ car $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et par suite $r:P\to P$; $M(z)\mapsto M'(z')$ avec $z'=e^{-i\frac{\pi}{2}}z+\left(1-e^{i\frac{\pi}{2}}\right)z_A$. On a $r(C)=E\Leftrightarrow z_E=iz_C+(1-i)z_A$, or

$z_A=a$ et $z_C=-b$ donc $e=-ib+(1-i)a$

b) On a $R\left(A,-\frac{\pi}{2}\right)(B)=F$; $f=z_F=e^{-i\frac{\pi}{2}}z_B+\left(1-e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)z_A\Rightarrow f=ib+(1+i)a$. On a AEFH est un parallélogramme donc $\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{AE}$ d'où $z_H-z_F=z_E-z_A$ donc $z_H-z_A=e-a+f$ or $e=-ib+a(1-i)$ et $f=-ib+(1+i)a$ et par suite $h=z_H=-2ib+a$

On a $h=z_H=-2ib+a$, On a ACDE est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}$ d'où $z_D-z_C=z_E-z_A$ et par suite $d=z_D=z_E-z_A+z_C=e-a-b=ib-ai-b$

3) a) $\frac{EF}{OA}=\left|\frac{z_E-z_F}{z_O-z_A}\right|=\left|\frac{e-f}{a}\right|=\left|\frac{-2ia}{a}\right|=|2i|=2$ et par suite $EF=2OA$; $\frac{\text{aff}\overrightarrow{FE}}{\text{aff}\overrightarrow{OA}}=\frac{-2ia}{a}=-2i\in i\mathbb{R}\Rightarrow(FE)\perp(OA)$

b) $\frac{EF}{OA}=\left|\frac{z_E-z_F}{z_O-z_A}\right|=1$ et par suite $BD=CH$; $\frac{\text{aff}\overrightarrow{BD}}{\text{aff}\overrightarrow{CH}}=\frac{d-b}{h-c}=-i\in i\mathbb{R}\Rightarrow(BD)\perp(CH)$

Exercice N° 25 : ABC : isocèle de sommet principale A or $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $K=B*C$

1)a) $\varphi(B)=C$ et $\varphi(C)=B$; montrons que $\varphi(K)=K$ $K=B*C$ Or φ conserve le milieu donc $\varphi(K)=\varphi(B)*\varphi(C)=C*B=K$ Montrons que $\varphi((AK))=(AK)$ on a $(AK)\perp(BC)$ Or φ conserve l'orthogonalité donc $\varphi((AK))\perp\varphi((BC))$ d'ou $\varphi((AK))\perp(BC)$ or $\varphi(K)=K\in(AK)\Rightarrow\varphi((AK))$ est la perpendiculaire à (BC) passant par K d'où $\varphi(AK)=(AK)$ (car (AK)=med [BC]

b) ζ est le cercle de diamètre $[BC]$ donc $\varphi(\zeta)=$ cercle de diamètre $\varphi([BC])=[BC]$ d'où $\varphi(\zeta)=\zeta$ $A\in(AK)\cap\zeta$ (Car ABC est rectangle en A) d'où $\varphi(A)\in\varphi((AK))\cap\varphi(\zeta)$ d'où $\varphi(A)\in(AK)\cap(\zeta)$ c) On a $(AK)\cap(\zeta)=\{A,A'\}$ où $A'=S_K(A)$

1^ère cas si $\varphi(A)=A$ et on a $\varphi(B)=C$ et $\varphi(C)=B$ (donc $\varphi\neq Idp$ car $\varphi(B)\neq B$) A est un point fixe or $\varphi(K)=K\Rightarrow$ K est un point fixe donc φ fixe deux points distinct A et K (et $\varphi\neq Idp$) d'où $\varphi=S_{(AK)}$

2^ème cas si $\varphi(A)=A'$, on a $\varphi(K)=K\Rightarrow$ K est un point fixe par φ Montrons que K est un seul point fixe par φ Si M est un autre point fixe par φ et on a $\varphi(B)=C$ donc $M\in$ méd$[BC]$ et $\varphi(A)=A'$ donc $M\in$ méd$[AA']$ d'où $M\in$ méd$[AA']\cap$méd$[BC]\Rightarrow M=K$ d'où φ admet un seul point fixe : c'est $K\Rightarrow\varphi=R_{(K,\theta)}$ où $\theta\equiv(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB})\equiv\pi[2\pi]$ d'où $\varphi=R_{(K,\pi)}=S_K$

2)a) $K=A*A'=B*C$ or ABC est rectangle et isocèle $\Rightarrow$ ABA'C est un carré

b) On a $B'A'=A'A$ car $B=A*B'$ $(A'B)\perp(BB')\Rightarrow(A'B)=$ méd$[AB']$ On a $A'B'=AA'$ et $A'B'\neq0$ d'où il existe un unique déplacement R_1 $R_1(B')=A'$ et $R_1(A')=A$ c) On a $r_{(B,\frac{\pi}{2})}(B')=A'$ et $r_{(B,\frac{\pi}{2})}(A')=A$ or $R_1(B')=A'$ et $R_1(A')=A$ donc R_1 et $r_{(B,\frac{\pi}{2})}$ coïncident en deux points distincts d'où $R_1=r_{(B,\frac{\pi}{2})}$ *) Montrons que $R_1o\varphi=r_{(A,-\frac{\pi}{2})}$ ona $\varphi=S_K\Rightarrow R_1o\varphi=r_{(B,\frac{\pi}{2})}or_{(K,\pi)}=R_{(\Omega,-\frac{\pi}{2})}$ or $R_1o\varphi(A)=R_1(A')=A\Rightarrow$ A est le point fixe d'où $R_1o\varphi=R_{(A,-\frac{\pi}{2})}$

3)a) $f=r_{(K,\frac{\pi}{2})}or_{(A,\frac{\pi}{2})}\Rightarrow f(B)=r_{(K,\frac{\pi}{2})}(C)=A$, $g=r_{(K,-\frac{\pi}{2})}or_{(A,\frac{\pi}{2})}\Rightarrow g(B)=r_{(K,-\frac{\pi}{2})}(C)=A'$

b) *) $f=r_{(K,\frac{\pi}{2})}or_{(A,\frac{\pi}{2})}=r_{(\omega,\pi)}=S_\omega$ or $f(B)=A\Rightarrow\omega=A*B$ or $I=A*B\Rightarrow f=S_I$

*) $g=r_{(K,-\frac{\pi}{2})}or_{(A,\frac{\pi}{2})}=t_{\vec{u}}$ or $g(B)=A'\Rightarrow\vec{u}=\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow$ $\boxed{g=t_{\overrightarrow{AC}}=t_{\overrightarrow{BA'}}}$

4) $foS_{(AB)}=S_IoS_{(AB)}=r_{(I,\pi)}oS_{(AB)}=S_{(IK)}oS_{(AB)}oS_{(AB)}=S_{(IK)}$ $goS_{(AB)}=t_{(AC)}oS_{(AB)}=S_{(KJ)}oS_{(AB)}oS_{(AB)}=S_{(KJ)}$

Devoir de contrôle N° 1 (Exemple 1)

Exercice N° 1: A) 1) $U_{2n}=\frac{2n}{2n+1}$; $\lim_{n\to+\infty}U_{2n}=1$ et $\lim_{n\to+\infty}(U_{2n+1})=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-(2n+1)}{3n+2}\right)=-1$.

Donc (U_n) est divergente. (Faux)

2) $\frac{k}{2n^2+1}\leq U_k\leq\frac{k}{2n^2}\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+1}\leq\sum_{k=1}^{n}U_k\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}\Leftrightarrow\frac{n(n+1)}{2(2n^2+1)}\leq S_n\leq\frac{n(n+1)}{2(2n^2)}$

On a : $\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2(2n^2+1)}=\frac{1}{4}$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2(2n^2)}=\frac{1}{4}$ et par suite $\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{4}$ (Vrai)

B)1) $\to$ c) ; 2) $\to$ c) 3)a)ii. b)iii.

Exercice N° 2 : voir Exercice N°8 (Continuité) **Exercice N° 3** : voir Exercice N° 24 (Suites)

Exercice N° 4 : voir Exercice N° 7 (Complexe) **Exercice N° 5** : voir Exercice N° 14 (Complexe)

Devoir de contrôle N° 1 (Exemple 2)

Exercice N° 1 :A)1) $U_{2n}=\frac{1-2n}{1+2n}$; $\lim_{n\to+\infty}U_{2n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-2n}{2n}=-1$; $U_{2n+1}=\frac{1+2n+1}{-1+2n+1}$; $\lim_{n\to+\infty}U_{2n+1}=1$. On a $\lim_{n\to+\infty}U_{2n}\neq\lim_{n\to+\infty}U_{2n+1}$ donc (U_n) est divergente. (Faux)

2) $U_1=U_0+\left(-\frac{1}{3}\right)^0$; $U_2=U_1+\left(-\frac{1}{3}\right)^1$;…………….; $U_n=U_{n-1}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Donc $U_n=U_0+\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^0+\left(-\frac{1}{3}\right)^1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+....+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]=U_0+\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{3}}=1+\frac{3}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$

$\lim_{n\to+\infty}U_n=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$ (Vrai)

3) $U_1=f(U_0)=f(6)=5<U_0=6$ donc (U_n) est décroissante (Faux).

B)1)b) ; 2) b) ;3) c

Exercice N° 2 : voir exercice N° 14 (Dérivabilité) **Exercice N° 3** : voir exercice N° 23 (Suites)

Exercice N° 4 : voir exercice N° 5 (Complexe) **Exercice N° 5** : Voir exercice N° 19 (Complexe)

Devoir de synthèse N° 1 (Exemple 1)

Exercice N° 1 : 1) c) ; 2) a) ; 3) a) ,4) c)
Exercice N° 2 voir Exercice N° 20 (Déplacement)
Exercice N° 3 : Voir Exercice N° 9 (Fonction réciproque)
Exercice N° 4 : Voir Exercice N° 20 (Complexe)

Exercice N° 5 : 1) a) $(E):z^2-2(1+i)(\sin\theta-i)z+4\sin\theta=0$;

$\theta\in]-\pi;\pi]$ $\Delta'=2i(\sin^2\theta-2i\sin\theta-1)-4\sin\theta=2i\sin^2\theta+4\sin\theta-2i-4\sin\theta=-2i(1-\sin^2\theta)$
$=(1-i)^2\cos^2\theta=[(1-i)\cos\theta]^2$.

$z'=(1+i)(\sin\theta-i)+(1-i)\cos\theta=(\sin\theta+\cos\theta+1)+i(\sin\theta-\cos\theta-1)$
$z''=(1+i)(\sin\theta-i)-(1-i)\cos\theta=(\sin\theta-\cos\theta+1)+i(\sin\theta+\cos\theta-1)$

E admet des racines doubles $\Leftrightarrow\Delta=0\Leftrightarrow\cos\theta=0$ et $\theta\in]-\pi;\pi]\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{2}$ ou $\theta=\frac{\pi}{2}$

Si $\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow z'=z''=2$ et Si $\theta=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow z'=z''=-2i$

b) $z'=(1+i)(\sin\theta-i)+(1-i)\cos\theta=i(1-i)(\sin\theta-i)+(1-i)\cos\theta$
$=(1-i)[\cos\theta+i(\sin\theta-i)]=(1-i)(\cos\theta+i\sin\theta+1)=(1-i)(e^{i\theta}+1)$
$z''=(1+i)(\sin\theta-i)-(1-i)\cos\theta=i(1-i)(\sin\theta-i)-(1-i)\cos\theta=(1-i)[-\cos\theta+i(\sin\theta-i)]$
$=(1-i)(1-\cos\theta+i\sin\theta+1)=(1-i)(1-\cos\theta+i\sin\theta)=(1-i)(1-e^{-i\theta})$

2) $A(1-i)$; $B(-2i)$; $M(\sqrt{2}e^{i\theta})$; $M_1(z_1=(1-i)(1+e^{i\theta}))$; $M_2(z_2=(1-i)(1-e^{-i\theta}))$

a) $z_1=(1-i)(1+e^{i\theta})=(1-i)e^{i\theta}+(1-i)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\theta}+(1-i)=e^{-i\frac{\pi}{4}}z+(1-i)$

Rappel : $\theta\neq2k\pi$ $k\in Z$; L'application $f:P\to P$; $M(z)\mapsto M'(z')$ tel que : $z'=e^{i\theta}z+b$ est une rotation d'angle θ, de centre A d'affixe : $z_A=\frac{b}{1-e^{i\theta}}$; $z_1=e^{-i\frac{\pi}{4}}z+(1-i)$; $-\frac{\pi}{4}\neq2k\pi$ donc $M_1(z_1)$ est l'image de $M(z)$ par la rotation R d'angle $-\frac{\pi}{4}$ de centre Ω dont l'affixe

est : $z_\Omega=\frac{1-i}{1-e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\frac{1-i}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\sqrt{\frac{2}{2}}\right)}=\frac{1-i}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\sqrt{\frac{2}{2}}}=\frac{(1-i)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left[\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\left[\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]}$

$=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}-i+i\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{1-\sqrt{2}-i}{2-\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}-i\frac{1}{2-\sqrt{2}}$

b) M d'affixe $z=\sqrt{2}e^{i\theta}\Rightarrow|z|=\sqrt{2}\Leftrightarrow OM=\sqrt{2}$. Donc M appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

$(x;y)$ sont les coordonnés de M ; alors : $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta\\y=\sqrt{2}\sin\theta\\\theta\in]-\pi;\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\leq y\leq\sqrt{2}\end{cases}$ Lorsque θ varie dans $]-\pi;\pi]$ M décrit le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.Comme $M_1=R(M)$ donc lorsque θ décrit $]-\pi;\pi]$; M_1 décrit le cercle de rayon $\sqrt{2}$ de centre $R(O)$ d'affixe $z'=e^{-i\frac{\pi}{4}}z+(1-i)=1-i=z_A$

Lorsque θ varie dans $]-\pi;\pi]$ M décrit le cercle de centre A et de rayon $OA=\sqrt{2}$

c) $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM_1}})\equiv\arg\left(\frac{z_1-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$. Or $\frac{z_1-z_A}{z_B-z_A}=\frac{(1-i)(1+e^{i\theta})-(1-i)}{-2i-(1-i)}=\frac{(1-i)[(1+e^{i\theta})-1]}{(1-i)^2-(1-i)}$
$=\frac{(1-i)e^{i\theta}}{(1-i)(1-i-1)}=\frac{e^{i\theta}}{-i}=\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\frac{\pi}{2}}}$.

D'où $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM_1}})\equiv\arg\left(\frac{z_1-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]\equiv\arg\left(e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\right)[2\pi]\equiv\theta+\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Construction de M_1 dans le cas où $\theta=\frac{\pi}{8}$

$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM_1}})\equiv\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}[2\pi]\equiv\frac{5\pi}{8}[2\pi]$. Donc $M_1\in[AT)$.

Ou T un point tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AT}})\equiv\frac{5\pi}{8}[2\pi]$ D'autre part $M_1\in\xi_{(A,OA)}$

et par suite : $M_1=\xi_{(A;OA)}\cap[AT)$

3) a) I le milieu de $[M_1M_2]$; $z_I=\frac{z_{M_1}+z_{M_2}}{2}=\frac{2(1-i)(1+i\sin\theta)}{2}=(1+i)(\sin\theta-i)=(\sin\theta+1)+i(\sin\theta-1)$

$I(x;y)\Rightarrow\begin{cases}x=1+\sin\theta\\y=\sin\theta-1\\\theta\in]-\pi;\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\theta=x-1\\y=(x-1)-1\\\theta\in]-\pi;\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-2\\\theta\in]-\pi;\pi]\end{cases}$

Lorsque θ décrit $]-\pi;\pi]$; I décrit le segment $[BB']$ où $B'(2)$

b) $\theta\in]-\pi;\pi]/\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\}$ On a $M_1\neq M_2$ aff$(\overrightarrow{M_1M_2})=z_2-z_1=(1-i)(1-e^{-i\theta})-(1-i)(1+e^{i\theta})$
$=(1-i)(1-e^{-i\theta}-1-e^{i\theta})=-(1-i)(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=-2\cos\theta(1-i)=-2\cos\theta\,\text{aff}(\overrightarrow{OA})\Leftrightarrow\overrightarrow{M_1M_2}=-2\cos\theta\overrightarrow{OA}$

c) $(M_1M_2)//(OA)$ avec $(OA): y=-x$ et $(BB'): y=x-2 \Rightarrow (OA)\perp(BB')$; le produit des coefficients directeurs de (OA) et (BB') est égal à -1.Donc $\begin{cases}(M_1M_2)\perp(BB')\\ I=M_1*M_2\in(BB')\end{cases}$ et par suite (BB') est médiatrice de $[M_1M_2]$ alors M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à $(BB'): y=x-2$ .L'ensemble des points M_2 lorsque θ décrit $]-\pi;\pi]$ M_1 décrit le cercle $\xi_{(A;\sqrt{2})}$. Or $\begin{cases}M_2=S_{(BB')}(M_1)\\ \text{et } A\in(BB')\end{cases} \Rightarrow M_2$ décrit $S_{(BB')}(\xi)=\zeta$

4) a) $\Gamma=\left\{M(z)\in P \text{ tel que} : \arg\left(\frac{z}{z+2i}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[\pi]\right\}$ $z\neq0$ et $z\neq-2i$;

$M(z)\in\Gamma \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z}{z+2i}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z}{z-(-2i)}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{BM};\overrightarrow{OM}}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[\pi]$

$\Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MO}}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[\pi]$

Soit $A'(-1-i)$;On a $OA'BA$ est un carré de sens direct. $\left(\widehat{\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB}}\right)[\pi]$.Donc Γ est le cercle $\zeta'/\{O;B\}$ avec ζ' est le cercle qui passe par O et B et tangente à la droite (OA') en O.

b) $\forall\ \theta\in\,]-\pi;\pi[\,/\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$ On a $\frac{z_1}{z_1+2i}=\frac{(1-i)(1+e^{i\theta})}{[(1-i)(1+e^{i\theta})]-(-2i)}=\frac{(1-i)(1+e^{i\theta})}{(1-i)(1+e^{i\theta})-(1-i)^2}$

$=\frac{(1-i)(1+e^{i\theta})}{(1-i)(1+e^{i\theta}-1+i)}=\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}+i}=\frac{e^{i0}+e^{i\theta}}{e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}}=\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right)}=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$\forall\ \theta\in\,]-\pi;\pi[\,/\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$; $\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\in\left]-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\,/\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$

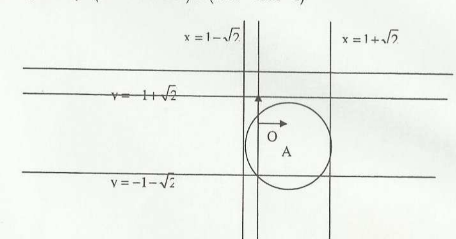
1er cas :Si $\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right[\Rightarrow \begin{cases}\cos\frac{\theta}{2}>0\\ \text{et } \cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)>0\end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_1+2i}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$:forme exponentielle de $\frac{z_1}{z_1+2i}$

2ième cas : Si $\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\in\left]-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \begin{cases}\cos\frac{\theta}{2}>0\\ \text{et } \cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)<0\end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_1+2i}=\frac{-\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left(-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right)$

$\frac{z_1}{z_1+2i}=\frac{-\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)}=\frac{-\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ Il est clair que $\forall\ \theta\in\,]-\pi;\pi[\,/\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$ $\arg\left(\frac{z_1}{z_1+2i}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[\pi]$ et par suite $M_1(z_1)\in\Gamma=\xi_{(A;\sqrt{2})}/\{O;B\}$

Pour $\theta=-\frac{\pi}{4}$; $z_1=-2i=z_B\Rightarrow M_1=B$;Pour $\theta=\pi$; $z_1=0=z_O\Rightarrow M_1=O$. Donc $M_1\in\xi_{(A;\sqrt{2})}$

D'autre part ; $z_1=(\sin\theta+\cos\theta+1)+i(\sin\theta-\cos\theta-1)$



$M_1(x,y)\Rightarrow\begin{cases}x=\sin\theta+\cos\theta+1\\ y=\sin\theta-\cos\theta-1\\ \theta\in\,]-\pi;\pi]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1\\ y=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{3\pi}{4}\right)-1\\ \theta\in\,]-\pi;\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\theta\in\,]-\pi;\pi]\Rightarrow\begin{cases}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\in\left]-\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]\\ \left(\theta-\frac{3\pi}{4}\right)\in\left]-\frac{7\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\in[-1;1]\\ \cos\left(\theta-\frac{3\pi}{4}\right)\in[-1;1]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\\ \sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{3\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]\\ y\in\left[-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right]\end{cases}$ Donc lorsque θ varie dans $]-\pi;\pi]$, le point M_1 décrit le cercle $\xi_{(A;\sqrt{2})}$

Devoir de synthèse N° 1 (Exemple 2)

Exercice N° 1 : 1) c) ; 2) b) ; 3) b)

Exercice N° 2 : Voir Exercice N° 23 (Complexe)

Exercice N° 3 : voir Exercice N° 10 (Déplacement)

Exercice N° 4 : voir Exercice N° 17 (Fonction réciproque)

Exercice N°5 I) 1) a) Faux ; b) Vrai ; c) Vrai

2) a)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$		$+\infty$	↘	$-\infty$

II) on a $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ et $f\left(\sqrt{2}\right)=0$

(asymptote oblique au voisinage de $+\infty$)

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ signifie $\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{\sqrt{x^2-1}}+\alpha=b=-1$; $f\left(\sqrt{2}\right)=a\sqrt{2}-\sqrt{2}=0\Rightarrow a=1$ d'où $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-x$.

2) a)

$A_\lambda=\int_{\sqrt{2}}^{\lambda}\left(\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-x\right)-(-x+1)\right)dx=\int_{\sqrt{2}}^{\lambda}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-1\right)dx=\left[\sqrt{x^2-1}-x\right]_{\sqrt{2}}^{\lambda}=\sqrt{\lambda^2-1}-\lambda-1+\sqrt{2}\,(u.a)$

b)

$\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda^2-1}-\lambda-1+\sqrt{2}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\lambda^2-1}-\lambda\right)\left(\sqrt{\lambda^2-1}+\lambda\right)}{\sqrt{\lambda^2-1}+\lambda}+\sqrt{2}-1=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{\lambda^2-1}+\lambda}+\sqrt{2}-1$

$=\sqrt{2}-1\,(u.a)$.